正規表現と有限オートマトンの表現*

斉　藤　立　彦

Regular Expression and Representation of Finite Automata

By

Tatsuhiko SAITO

The derivative and the characteristic equations, which were introduced by J.A. Brzozowski, have the very important roles for the analysis and synthesis of finite automata. In this paper, we transform a system of the characteristic equations into matrices, and introduce the new concept that two matrices are similar. We using the concept, some properties of the equations are illustrated. We using the results, the necessary and sufficient conditions that the states are equivalent and that finite automata are definite events, are given.

Then, we introduce a prcoedure which constructs a system of characteristic equations from a regular expretion. And the procedure is recursively given.

1. まえがき

本論に入るまえに，本論文で取りあつかう有限オートマトン，正規表現，導集合の定義を明確にし，それらの諸性質をのべておく。

1・1 記号および記号列の定義

有限個の記号の集合 $\{0, 1, 2, \cdots\cdots, k-1\}$ を σ_k であらわし，これらの記号の有限列Sを系列という。すべての系列の集合を σ_k^* で表わし，また記号を含まない系列，および系列の空集合を λ，φ で表わし，σ_k^* は λ，φ を含むものとする。

1・2 σ_k^* の上の有限オートマトン Af の定義

次の性質をもつ system $\langle S, M, a, F\rangle$ を σ_k^* の上の有限オートマトンという。

(1) Sは内部状態の空でない集合 $\{a_i\}$ である。

(2) FはSの部分集合で，Fに含まれる状態を最終状態という。

(3) aはSの一つの要素で，初期状態という。

(4) Mは $S \times \sigma_k^*$ をSに写像する関数で，ある状態 a_i と系列 x によって，$M(a_i, x) = a_j$ なる状態を決定する関数である。

*水産大学校研究業績　第575号，1968年8月10日 受理.
Contribution from the Shimonoseki University of Fisheries, No. 575.
Received Aug. 10, 1968.

1・3 正規表現および正規集合の定義

(1) λ，φ，0，1，……，k－1 は正規表現である。

(2) P および Q が正規表現ならば P＋Q，PQ，P^* は正規表現である。

(3) (1) および (2) を有限回用いて作られるものが正規表現でこれ以外のものは正規表現でない。

正規表現 R の表わす系列の集合を $|R|$ であらわし，次のように定義する。

(1) $|\varphi|$ は空集合である。

(2) $|\lambda| = \{\lambda\}$

(3) $|i| = \{i\}$ $(i = 0, 1, 2, \cdots\cdots, k-1)$

(4) $|P+Q| = |P| \cup |Q|$ (U は和集合をあらわす)

(5) $|PQ| = |P||Q| = \{xy \mid x \in |P|, \ y \in |Q|\}$

(6) $|P^*| = \{\lambda\} \cup |P| \cup |P||P| \cup |P||P||P| \cup \cdots\cdots$

(7) P ＝ Q ならば，そのときにかぎり $|P| = |Q|$ である。

以後，正規表現 R を正規集合 $|R|$ の意味に用いることがある。

1・4 導集合の定義および諸性質

Rを系列の場合，Sを一つの系列とするとき，集合 $\{t \mid st \in R\}$ を $D_s R$であらわし，Rのsに関する導集合という。

導集合についての本論文に関係するいくつかの性質を列記しておく。

(1) Rが正規表現ならば，$D_s R$も正規表現である。

(2) 正規表現Rは次の形で表わすことができる。

$$R = \delta(R) + \sum_{i=0}^{k-1} i D_i R$$

$$\text{ただし} \qquad \delta(R) = \begin{cases} \lambda \ ; \ \lambda \in R\text{のとき} \\ \varphi \ ; \ \lambda \notin R\text{のとき} \end{cases}$$

さらに (1)，(2) を用いると，$D_s R$ も次の形で表わせる。

$$D_s R = \delta(D_s R) + \sum_{i=0}^{k-1} i D_{si} R$$

このような方程式を正規表現Rの特性方程式という。

(3) 正規表現R，Qについて，R＝Qならば，そのときにかぎり，$D_i R = D_i Q$ $(i = 0, 1, 2, \cdots\cdots, k-1)$ でかつ $\delta(R) = \delta(Q)$である。

(4) あらゆる正規表現は有限個の導集合をもつ。

2. 有限オーマトンの構成

導集合を用いて，有限オートマトンを構成するとき，導集合のもつ意味を明らかにしておくことが必要である。このため，次の定義および定理を与える。

〔**定義 1**〕 有限オートマトンの一つの状態を a_i とするとき，集合 $\{x \mid M(a_i, x) \in F, \ x \in \sigma_k^*\}$ を状態 a_i の導集合といい，$D(a_i)$ で表わす。

a を初期状態とするとき，$D(a) = |R|$ ならば，そのときにかぎり，この有限オートマトンは正規表現Rを受理するという。

$D(a_i) = D(a_j)$ ならば，そのときにかぎり a_i と a_j は等価であるといい，$a_i \cong a_j$ で表わす。 また $\{yx \mid x \in D(a_i)\}$ を $yD(a_i)$ で表わす。

〔**定理 1**〕 $M(a_j, i)=a_{ji}$ でかつ $D(a_j)=\delta(D(a_j))+\sum_{i=0}^{k-1} i D_i(D(a_j))$ ならば，$D_i(D(a_j))=D(a_{ji})$ である。

（証明） $M(a_j, iy)=M(M(a_j, i), y)=M(a_{ij}, y)$ ……………………………… (1)

$D_i(D(a_j))\ni y$ ならば，$iy\in D(a_j)$

よって，$M(a_j, iy)\in F$。(1) 式を用いると $M(a_{ji}, y)\in F$ ゆえに，$y\in D(a_{ji})$

逆に，$D(a_{ji})\ni y$ ならば，$M(a_{ji}, y)\in F$，(1) 式を用いると$M(a_j, iy)\in F$ したがって $iy\in D(a_j)$，よって $y\in D_i(D(a_j))$，ゆえに$D_i(D(a_j))=D(a_{ji})$。

（証明終り）

この定理によって，正規表現の一つの導集合は，この正規表現を受理する有限オートマトンのある状態を最終状態へ導くすべての系列の集合を表わすことがわかる。

〔**定理 2**〕 一つの状態 a_i が最終状態であるための必要十分条件は

$$\delta(D(a_i))=\lambda \quad \text{である。}$$

（証明） $M(a_i, \lambda)=a_i$より$a_i\in F$ならば，$\lambda\in D(a_i)$，逆に $\lambda\in D(a_i)$ならば，$a_i\in F$は明らか。

（証明終り）

〔**定理 3**〕 正規表現 R に対し有限オートマトン A_f を次のように構成すれば，A_f は R を受理する。

(1) 正規表現Rに切期状態aを対応させる。

(2) 一つの導集合 D_sR には一つの状態 a_sを対応させる。

(3) 導集合 D_sR に状態 a_s が対応し，$D_i(D_sR)$ に a_{si} が対応しておれば，そのときにかぎり $M(a_s, i)=a_{si}$ である。

(4) $\lambda\in D_sR$ ならば，D_sR に対応する状態 a_s は最終状態とする。

（証明） $M(a, s)=a_s$ とすれば，D_sR には a_s が対応している。$R\ni s$ とすれば，$s=s\lambda$ より $\lambda\in D_sR$，したがって a_s は最終状態である。よって$s\in D(a)$。

逆に，$D(a)\ni s$ とすれば，a_s は最終状態であり，したがって $D_sR\ni\lambda$，$s\lambda=s$ より $s\in R$，よって $R=D(a)$。

（証明終わり）

〔系 3・1〕 D_sR にa_i が対応していれば $D_sR=D(a_i)$ である。

以上のことより，正規表現が与えられれば，その導集合を求め，正規表現を受理する有限オートマトンを構成することができる。

逆に有限オートマトンが与えられれば，その状態の導集合より特性方程式を作ることができる。そこでこの特性方程式を解くことによって，この有限オートマトンが受理する正規表現を求めることができるのであるが，ここでは，このことには触れないで，この特性方程式を行列を用いて表現し，有限オートマトンの諸性質を明らかにする。

3. 特性方程式の行列による表現

正規表現 $R=R_1$ のすべての導集合を $R_1, R_2, \cdots\cdots, R_m$ とし，R_1 のすべての特性方程式を

$$R_1=\delta(R_1)+\sum_{i=1}^{k-1} i D_i R_1$$

$$R_2=\delta(R_2)+\sum_{i=1}^{k-1} i D_i R_2$$

………………………………

$$R_m = \delta(R_m) + \sum_{i=1}^{k-1} i D_i R_m$$

とする。このとき D_iR_1, D_iR_2, ……D_iR_m（$i=0, 1, 2, \cdots\cdots, k-1$）は R_1, R_2, ……, R_m のいずれかに等しい。

この方程式を行列で表わすと，次のようにかける。

$$\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \cdots\cdots t_{1m} \\ t_{21} & t_{22} \cdots\cdots t_{2m} \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ t_{m1} & t_{m2} \cdots\cdots t_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta(R_1) \\ \delta(R_2) \\ \vdots \\ \delta(R_m) \end{pmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

ここで t_{ij} は φ 又は長さ1の系列の集合で，$t_{ij}=x$ ならば，$D_x(R_i)=R_j$ である。行列についての演算は，従来定義されている行列と全く同じであるとする。

$$\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_m \end{pmatrix} = x, \quad \begin{pmatrix} t_{11} & \cdots\cdots\cdots\cdots & t_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ t_{1m} & \cdots\cdots\cdots\cdots & t_{mm} \end{pmatrix} = T,$$

$$\begin{pmatrix} \delta(R_1) \\ \delta(R_2) \\ \vdots \\ \delta(R_m) \end{pmatrix} = E \quad とおくと$$

(2) 式は $TX+E=X$ とかける。この両辺に T をかけて，E を加えると

$T^2E+TE+E=TX+E=X$

このことをくりかえすと

$X=E+TE+\cdots\cdots\cdots+T^nE+T^{n+1}X$

$n\to\infty$ とすると

$X=E+TE+T^2E+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} T^n E \qquad ただし \quad T^\circ = \lambda \ とする。$$

そこで

$$T^nE = \begin{pmatrix} r_{1n} \\ r_{2n} \\ \vdots \\ r_{mn} \end{pmatrix} \quad とすれば \quad r_{jn} \ は \ R_j$$

に含まれる長さ n のすべての系列を表わしており，$R_j = \sum_{n=0}^{\infty} r_{jn}$ とかける。したがってすべての n について $r_{sn}=r_{tn}$ ならば，そのときにかぎり $R_s=R_t$ である。さらにこの事を明確にするために次の定義を与える。

〔定義　2〕　同じ型の二つの行列 $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$ において，$a_{ij}=a_{pq}$ ならば，そのときにかぎり $b_{ij}=b_{pq}$ であるとき，行列Aと行列Bは相似であるといい，$A\backsim B$ で表わす。

〔**定理　4**〕　$T^pE \infty T^qE$ ならば, $T^{p+1}E = T^{q+1}E$　である。

（証明）

$$r_{s,\,p+1} = \sum_{i=1}^{k-1} i\, r_{si,\,p}, \qquad r_{t,\,p+1} = \sum_{i=1}^{k-1} i\, r_{ti,\,p} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

とすれば,

$$T^{p+1}E = T(T^pE),\ T^{q+1}E = T(T^qE)$$

より

$$r_{s,\,q+1} = \sum_{i=1}^{k-1} i\, r_{si,\,q}, \qquad r_{t,\,q+1} = \sum_{i=1}^{k-1} i\, r_{ti,\,q} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

そこで　$r_{s,\,p+1} = r_{t,\,p+1}$ とすれば　(3) 式より　$r_{si,\,p} = r_{ti,\,p}$ ($i = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots k-1$)

$T^pE \infty T^qE$　より　$r_{si,\,q} = r_{ti,\,p}$

(4) 式より　$r_{s,\,q+1} = r_{t,\,q+1}$　となる。

同様にして　$r_{s.\,q+1} = r_{t,\,q+1}$　ならば

$r_{s,\,p+1} = r_{t,\,q+1}$　となる。

よって　$T^{p+1}E \infty T^{q+1}E$

（証明終り）

〔系　4．1〕　$T^pE \infty T^qE$　ならば

$T^{p+j}E \infty T^{q+j}E$　($j = 1,\ 2,\ \cdots\cdots\cdots$)。

（証明）　定理 4 を次々に適用すればよい。

〔系　4．2〕　$T^pE \infty T^qE$　ならば

$T^pE \infty T^{p+(q-p)j}E$　($p < q$)

（証明）系　4・1　で j が $q-p$ の倍数のときを考えればよい。

定理 4 およびその系によって T^nE で相似なものが循環して現われることがわかる。行列Xが与えられれば, 行列の要素が有限個であることより, T^0E, T^1E, T^2E, ……… を次々と作っていくと有限回ですでに現われた行列と相似な行列が必ず現われる。そこで, このことを利用して二つの導集合が等しいための必要十分条件を導き, それらの導集合に対応する状態が等価であることがわかるので, 最簡状態図を得ることができる。

〔**定理　5**〕　$T^pE \infty T^qE$ ($p < q$) のとき $R_s = R_t$ であるための必要十分条件は $r_{s,0} = r_{t,0}$, $r_{s,1} = r_{t,1}$, $\cdots\cdots r_{s,q-1} = r_{t,q-1}$　である。

（証明）　必要条件は明らかである。

$r_{s,0} = r_{t,0}$, $r_{s,1} = r_{t,1}$, $\cdots\cdots$, $r_{s,p} = r_{t,p}$, $\cdots\cdots$, $r_{s,q-1} = r_{t,q-1}$　とすれば $T^pE \infty T^qE$　より系 4・1 を用いれば　$T^{p+j}E \infty T^{q+j}E$

系 4・2 を用いれば　$T^{p+j}E \infty T^{p+j+(q-p)i}E$

仮定より　$r_{s.\,p+j} = r_{t,\,p+j}$ ($j = 0,\ 1,\ 2, \cdots\cdots\cdots\cdots,\ q-p-1$)

$T^{p+j}E \infty T^{p+j+(q-p)i}E$　より

$r_{s,\,p+j+(q-p)i} = r_{t,\,p+j+(q-p)i}$ ($i = 1,\ 2,\ \cdots\cdots\cdots$)

したがってすべての n について　$r_{s,n} = r_{t,n}$　である。

よって $R_s = R_t$　である。

（証明終わり）

次に決定性事象について一つの定理を導く。決定性事象は正規表現を用いて　$R = \rho + \sigma_k^* f$　として定義されるが（このとき e, f は有限長の系列の有限個の集合である), ある正規表現又は状態図が与えられたとき, これが決定性事象かどうかを決定することは因難なことである。次の定理が, このことを解決する一

つのてだてとなる。

〔**定理　6**〕　正規表現 $R=R_1$ が決定性事象であるための必要十分条件は，ある n が存在して $r_{1,n}=r_{2,n}=\cdots\cdots=r_{m,n}$ となることである。

(証明)　$r_{1,n}=r_{2,n}=\cdots\cdots=r_{m,n}=f$ とすれば $r_{j,n+1}=\sum_{i=0}^{k-1} i f=(\sum_{i=0}^{k-1} i) f=\sigma_k f$ $(j=1, 2, \cdots\cdots, n)$,　$r_{j,n+p}=\sigma_k^p f$ とすれば

$r_{j,n+p+1}=\sum_{i=0}^{k-1} i\,\sigma_k^p f=(\sum_{i=0}^{k-1} i)\,\sigma_p^k f=\sigma_k\,\sigma_k^p\ f=\sigma_k^{p+1} f$

よって $R_1=\sum_{i=0}^{\infty} r_{1,n}=r_{1,0}+r_{1,1}+\cdots\cdots+r_{1,n-1}+f+\sigma_k f+\sigma_k^2 f+\cdots\cdots$

$=r_{1,0}+r_{1,1}+\cdots\cdots+r_{1,n-1}+\sigma_k^* f$

となり R_1 は決定性事象となる。

逆に $R_1=e+\sigma_k^* f$ とすれば $D_iR_1=D_i(e+f)+\sigma_k^* f$, R_1 の一つの導集合を $R_j=e_j+\sigma_k^* f$ とすれば $D_iR_j=D_i(e_j+f)+\sigma_k^* f$, よって R_1 が決定性事象ならば，その導集合はすびて決定性事象になり，しかも後続事象は常に $\sigma_k^* f$ となって等しい。n を十分大きしとれば，各導集合に含まれる長さ n の系列は初期事象に無関係になり，後続事象 $\sigma_k^* f$ によってきまる。後続事象はすべての導集合について等しいから $r_{1,n}=r_{2,n}=\cdots\cdots r_{m,n}$ となる。

(証明終わり)

〔例題　1〕　第1図のような状態図をもつ有限オートマトンについて考察する。

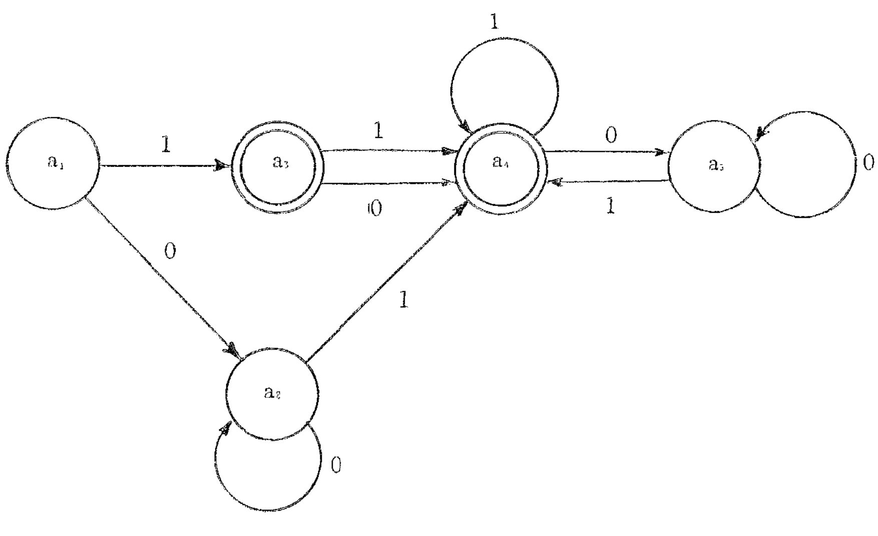

Fig. 1. State diagram of Example 1.
a_1 : initial state
a_3, a_4 : final state

$D(a_1)=R_1$, $D(a_2)=R_2$, $D(a_3)=R_3$, $D(a_4)=R_4$, $D(a_5)=R_5$

とおくと，次の方程式を得る。

$$
\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi & 0 & 1 & \varphi & \varphi \\ \varphi & 0 & \varphi & 1 & \varphi \\ \varphi & \varphi & \varphi & 0+1 & \varphi \\ \varphi & \varphi & \varphi & 1 & 0 \\ \varphi & \varphi & \varphi & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi \\ \lambda \\ \lambda \\ \varphi \end{pmatrix}
$$

これより

$$
E = \begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi \\ \lambda \\ \lambda \\ \varphi \end{pmatrix}, \quad TE = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0+1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad T^2E = \begin{pmatrix} 10+(0+1)1 \\ (0+1)1 \\ (0+1)1 \\ (0+1)1 \\ (0+1)1 \end{pmatrix}, \quad T^3E = \begin{pmatrix} (0+1)^2 1 \\ (0+1)^2 1 \\ (0+1)^2 1 \\ (0+1)^2 1 \\ (0+1)^2 1 \end{pmatrix}
$$

$$
T^4E = \begin{pmatrix} (0+1)^3 1 \\ (0+1)^3 1 \\ (0+1)^3 1 \\ (0+1)^3 1 \\ (0+1)^3 1 \end{pmatrix}
$$
を得る。

$T^3E \infty T^4E$ で $r_{2,0} = r_{5,0}$, $r_{2,1} = r_{5,1}$, $r_{2,2} = r_{5,2}$, $r_{2,3} = r_{5,3}$ より $R_2 \cong R_5$

よって第1図の状態図から a_5 をのぞき，$M(a_4, 0) = a_2$ とし，他に等価な状態はないから，最簡状態図を得る。また $r_{1,3} = r_{2,3} = r_{3,3} = r_{4,3} = r_{5,3}$ より R_1 は決定性事象で

$$
\begin{aligned}
R_1 &= 1 + 10 + (0+1)1(0+1)1 + (0+1)^2 1 + (0+1)^3 1 + \cdots\cdots \\
&= 10 + (0+1)^* 1
\end{aligned}
$$

となり，R_1 は決定性事象の標準形として得られる。

4. 正規表現より特性方程式を求める一方法

例題1わらわかるように状態図から特性方程式を求めることは簡単であるが，正規表現から特性方程式を作り出すことは簡単にはできない。本節では正規表現から特性方程式を作る一方法についてのべる。

まず，一つの記号だけからなる正規表現の特性方程式を実際に作り，次に正規表現 P，Q の特性方程式が得られれば，P + Q，PQ，P* の特性方程式が得られることを証明する。そうすれば正規表現の帰納的な定義により，すべての正規表現の特性方程式が求められることになる。

$R_1 = \varphi$ のとき，特性方程式は

$$
R_1 = \sum_{i=0}^{k-1} i\, R_1
$$

$R_1 = \lambda$ のとき，特性方程式は

$$
\begin{cases} R_1 = \lambda + \sum_{i=0}^{k-1} i\, R_2 \\ R_2 = \sum_{i=0}^{k-1} i\, R_2 \end{cases}
$$

$R_1 = j\ (j = 0,\ \cdots\cdots\cdots,\ k-1)$ のとき，特性方程式は

$$\begin{cases} R_1 = \sum_{i=0}^{j-1} i\, R_3 + j\, R_2 + \sum_{i=0}^{k-1} i\, R_3 \\ R_2 = \lambda + \sum_{i=0}^{k-1} i\, R_3 \\ R_3 = \sum_{i=0}^{k-1} i\, R_3 \end{cases}$$

次に P_1，Q_1 の特性方程式を

$$\begin{cases} P_1 = \delta(P_1) + \sum_{i=0}^{k-1} i\, D_i P_1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ P_2 = \delta(P_2) + \sum_{i=0}^{k-1} i\, D_i P_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ P_m = \delta(P_m) + \sum_{i=0}^{k-1} i\, D_i P_m \end{cases}$$

$$\begin{cases} Q_1 = \delta(Q_1) + \sum_{i=0}^{k-1} i\, D_i Q_1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \\ Q_2 = \delta(Q_2) + \sum_{i=0}^{k-1} i\, D_i Q_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ Q_n = \delta(Q_n) + \sum_{i=0}^{k-1} i\, D_i Q_n \end{cases}$$

とする。ただし，このとき $D_i P_1$, $D_i P_2$, ……$D_i P_m$ は P_i, P_2, ……, P_m のいずれかに等しく，$D_i Q_1$, $D_i Q_2$, ……$D_i Q_n$ も Q_1, Q_2, ………, Q_n のいずれかに等しくなっている。

式 (1), (2) より

$$P_1 + Q_1 = \delta(P_1) + \delta(Q_1) + \sum_{i=1}^{k-1} i\,(D_i P_1 + D_i Q_1)$$

更に $D_i P_1 + D_i Q_1$ について (1), (2) 用いて方程式を作る。このことを続けていくと，

$P_1 + Q_1$ の導集合は常に

$P_t + Q_s\,(t=1,\ 2,\ \cdots\cdots\cdots,\ m,\ S=1,\ 2,\ \cdots\cdots n)$

の形であり，これらの異なる形の数は高々mn個である。よってこのように (1), (2) を用いて $P_1 + Q_1$ のすべての特性方程式を求めることができる。

次に　式 (1), (2) を用いて

$$\begin{aligned} P_1 Q_1 &= \delta(P_1) Q_1 + \sum_{i=0}^{k-1} i\,(D_i P_1) Q_1 \\ &= \delta(P_1)\,\delta(Q_1) + \sum_{i=0}^{k-1} i\ \delta(P_1) D_i Q_1 + \sum_{i=0}^{k-1} i\,(D_i P_1) Q_1 \\ &= \delta(P_1)\,\delta(Q_1) + \sum_{i=0}^{k-1} i\,(\,\delta(P_1) D_i Q_1 + (D_i P_1) Q_1) \end{aligned}$$

更に，$\delta(P_1)D_iQ_1+(D_iP_1)Q_1$ の特性方程式を (1), (2) を用いて作ると一般に

$$Q_{t1}+Q_{t2}+\cdots\cdots+Q_{tj}+P_sQ_1$$
$$=\delta(Q_{t1})+\cdots\cdots+\delta(Q_{tj})+\delta(P_s)\delta(Q_1)$$
$$+\sum_{i=0}^{k-1} i\,(D_iQ_{t1}+\cdots\cdots+D_iQ_{tj}+\delta(P_s)D_iQ_1+(D_iP_s)Q_1)$$

を得る。よって P_1Q_1 の導集合は常に

$$Q_{t1}+Q_{t2}+\cdots\cdots+Q_{tj}+P_s\,(Q_1)$$

$(t_1,\ t_2,\ \cdots\cdots t_j$ は互に異なり，1, 2, ……, n のいずれかに等しい）の形で，これらの異なるものの数は，高々 2mn 個である。よって P_1Q_1 のすべての特性方程式は得られる。

次に

$$P_1^*=(\delta(P_1)+\sum_{i=1}^{k-i} i\,D_iP_1)^*$$
$$=(\sum_{i=1}^{k-1} i\,D_iP_1)^*$$
$$=\lambda+(\sum_{i=1}^{k-1} i\,D_iP_1)(\sum_{i=1}^{k-1} i\,D_iP_1)^*$$
$$=\lambda+(\sum_{i=1}^{k-1} i\,D_iP_1)P_1^*$$
$$=\lambda+\sum i\,(D_iP_1)P_1^* \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

さらに，$(D_iP_1)P_1^*$ について (1), (2), (3) を用いて方程式を作ると，一般に

$$(P_{s1}+P_{s1}+P_{s2}+\cdots\cdots P_{sj})\,P_1^*$$
$$=(\delta(P_{s1}+\cdots\cdots+\delta(P_{sj}))\,P_1^*+\sum i\,(D_iP_{s1}+\cdots\cdots+D_iP_{sj})\,P_1^*$$
$$=\delta(P_{s1})+\cdots\cdots+\delta(P_{sj})+(\delta(P_{s1})+\cdots\cdots+\delta(p_{sj}))\sum i\,(D_iP_1)\,P_1^*$$
$$+\sum i\,(D_1P_{s1}+\cdots\cdots+D_iP_{sj})\,P_1^*$$
$$=\delta(P_{s1})+\cdots\cdots+\delta(P_{sj})$$
$$+\sum i\,\{(\delta(P_{s1})+\cdots\cdots+\delta(P_{sj}))\,D_iP_1+D_iP_{s1}+\cdots\cdots+D_iP_{sj}\}\,P_1^*$$

となり，P_1^* の導集合の形は常に

$$(P_{s1}+\cdots\cdots+P_{sj})\,P_1^*$$

$(s_1,\ \cdots\cdots,\ s_j$ は互に異なり 1, 2, ……m のいずれかに等しい）で，これらの異なるものの高々数は 2^m 個である。よって，P_1^* のすべての特性方程式を得ることができる。

〔例題　2〕

$1+(11+10+00^*1)(0^*1)^*$ の特性方程式を求める。ただし，必要な部分だけを示し，$R_j=\varphi$ となるときは省略することにする。

$A_1=0^*1$ の特性方程式は

$$\begin{cases} A_1=0\,A_1+1\,A_2 \\ A_2=\lambda \end{cases} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

式 (1) を用いて，$B_1 = A_1{}^*$ の特性方程式を求める。

$B_1 = A_1{}^* = \lambda + A_1A_1{}^* = \lambda + (0A_1 + 1A_2)A_1{}^* = \lambda + 0A_1A_1{}^* + 1A_2A_1{}^*$

$A_1A_1{}^* = (0A_1 + 1A_2)A_1{}^* = 0A_1A_1{}^* + 1A_2A_1{}^*$

$A_2A_1{}^* = \lambda A_1{}^* = A_1{}^* = B_1$

$A_1A_1{}^* = B_2$　とおくと，B_1 の特性方程式は

$$\begin{cases} B_1 = \lambda + OB_2 + 1B_2 \\ B_2 = OB_2 + 1B_2 \end{cases} \qquad \cdots\cdots(2)$$

$C_1 = 10 + 11 + 00^*1$　の特性方程式は

$$\begin{cases} C_1 = 0C_3 + 1C_2 \\ C_2 = 0C_4 + 1C_4 \\ C_3 = 0C_3 + 1C_4 \\ C_4 = \lambda \end{cases} \qquad \cdots\cdots(3)$$

(2), (3) を用いて　$D_1 = C_1B_1$　の特性方程式を求める。

$D_1 = C_1B_1 = (0C_3 + 1C_2)B_1 = 1C_3B_1 + 1C_2B_1$

$C_3B_1 = (0C_3 + 1C_4)B_1 = 0C_3B_1 + 1C_4B_1$

$C_2B_1 = (0C_4 + 1C_4)B_1 = 0C_4B_1 + 1C_4B_1$

$C_4B_1 = \lambda B_1 = B_1 = \lambda + 0B_2 + 1B_1$

$B_2 = 0B_2 + 1B_1$

$C_3B_1 = D_2$，$C_2B_1 = D_3$，$C_4B_1 = B_1 = D_4$，$B_2 = D_5$　とおくと　D_1　の特性方程式は

$$\begin{cases} D_1 = 0D_2 + 1D_3 \\ D_2 = 0D_2 + 1D_4 \\ D_3 = 0D_4 + 1D_4 \\ D_4 = \lambda + 0D_5 + 1D_4 \\ D_5 = 0D_5 + 1D_4 \end{cases} \qquad \cdots\cdots(4)$$

$E_1 = 1$　の特性方程式は

$$\begin{cases} E_1 = 1E_2 \\ E_2 = \lambda \end{cases} \qquad \cdots\cdots(5)$$

(4), (5) を用いて　$R_1 = E_1 + D_1$　の特性方程式を求めると

$R_1 = E_1 + D_2 = 1E_2 + 0D_2 + 1D_3 = 0D_2 + 1(E_2 + D_3)$

$D_2 = 0D_2 + 1D_4$

$E_2 + D_3 = \lambda + 0D_4 + 1D_4$

$D_4 = \lambda + 0D_5 + 1D_4$

$D_5 = 0D_5 + 1D_4$

そこで　$D_2 = R_2$，$E_2 + D_3 = R_3$，$D_4 = R_4$，$D_5 = R_5$　とおくと，R_1 の特性方程式は

$$\begin{cases} R_1 = 0R_2 + 1R_3 \\ R_2 = 0R_2 + 1R_4 \\ R_3 = \lambda + 0R_4 + 1R_4 \\ R_4 = \lambda + 0R_5 + 1R_4 \\ R_5 = 0R_5 + 1R_4 \end{cases}$$

を得る。この方程式は，例題１で示した方程式と同じである。
よって

$$
\begin{aligned}
&1+(10+11+00^{*}1)(0^{*}1)^{*} \\
&=10+(1+0)^{*}1
\end{aligned}
$$

を得る。

文　　献

1) J.A. Brzozowski, 1962; "Canonical regular expressiors and minimal state graphs for definite enents" Proc, Symp. on the mathematical Theory of automata in N.Y.
2) J.A. Brzozowski, 1964 ; "Derivative of Regular Expressions" J. Assoc Computing Machinery.
3) M.A. Harrison, 1965; "Introduction to Swithing and Automata Theovy" McGgraw Hill.
4) S.C. Kleene, 1965; "Representation of events in nerve nets and finite Autonata" Autonata studiès, Princeton Uni, Press.
5) R.E. Miller, 1965; "Switching Theory" Vol. 2 John Wiley.
6) 尾崎　弘，樹下，1966；ディジタル代数学共立出版
7) 宇田川銈久，稲垣，丹下，1965；通信学会誌 "有限オートマトンの状態推移性の状態特性方程式による表示と正規表現について"