

(He³, 2p) の直接過程

柳 瀬 安 生

Direct process of the reaction (He³, 2p)

By

Yasuo YANASE

The effect of final state interaction is examined in the (He³, 2p) reaction at low energies of an incident He³ particle. First, the formal expression is derived in such a way that the effect of the final state interaction is taken into account through the phase shift of p-p scattering. Next, the shape of the energy spectra of the He³ (He³, 2p) He⁴ (Ground state) is calculated by employing the plane wave cut-off Born approximation. These calculation are compared to the proton energy spectra data at the angles measured.

§ 1. ま え お き

(He³, 2p)反応は反応過程の方から眺めると、複合核過程と直接反応過程とに大別される。ここでは、直接過程が扱われるが、この反応の特長は、終状態に現われる粒子と初期状態に現われる粒子が、全て異っていることと、終状態に二個の陽子が現われていることである。前者の場合の三粒子状態の反応は Demer,¹⁾ や Duncan 等²⁾ によって、相互作用の一部を省略し、Cut-off Born 近似で扱われている。また、後者の場合は D (P, 2P) n 反応で詳しく調べられている。³⁾ この場合、終状態の相互作用が重要な役割を示すことが知られている。

この論文では、上記の終状態相を作用として、2P状態の波動函数を適当にとることによって考慮し、入射粒子の中性子 Stripping がこの反応を引き起こすと考え、§2にその反応公式が導出される。この公式が適当なものであるかどうか検討する必要があるので、例として、§3に He³ (He³, 2P) He⁴ その応用が示され、最後の節で、この公式の妥当性が議論される。

§ 2. Formulation

入射 He³ の構成粒子のうち陽子を1, 2, 中性子を3とする。

全 Hamiltonian は

$$H=K+V_1+V_2+V_3+V_{12}+V_{23}+V_{13} \quad (1)$$

ここに、 V_i は標的核と He³ の構成粒子 i と j との相互作用、 K は標的核の Hamiltonian と He³ の運動エネルギーの和でありつぎのように表わされる。

$$K=H_T+K_1+K_2+K_3 \quad (2)$$

K_i は He³ の i 粒の運動エネルギー、 H_T は標的核の Hamiltonian である。

* 水産大学校研究業績 第473号, 1966年3月7日 受理

Contribution from the Shimonoseki University of Fisheries, No. 473

Received Mar.7,1966

初期状態での Hamiltonian を H_i , 終状態での Hamiltonian を H_f , 相互作用をそれぞれ V_i , V_f とすると,

$$\begin{aligned} H_i &= K + V_{12} + V_{23} + V_{13} \\ V_i &= V_1 + V_2 + V_3 \\ H_f &= K + V_3 \\ V_f &= V_1 + V_2 + V_{12} + V_{23} + V_{13} \end{aligned} \quad (3)$$

と書かれる。初期状態と終状態の固有値および固有函数をそれぞれ E_i , E_f および χ_i , χ_f とし, 入射波を ϕ_i^+ , と二個の相互作用している陽子と終状態の残留核となる波動函数を ϕ_f とすると,

$$\phi_i^+ = \chi_i + \frac{1}{E_i + i\eta - H} V_i \quad (4)$$

$$\phi_f^- = \phi_f + \frac{1}{E_f - i\eta - H_f} V_{12} \phi_f^- \quad (5)$$

となる。従って, 反応行列 M は

$$\begin{aligned} M &= (\chi_f, V_f \phi_i) \\ &= (\phi_f^-, (V_f - V_{12}) \phi_i^+,) + (\phi_i^-, V_{12} [1 - \frac{1}{E_f + i\eta - H_f} V_f] \phi_i^+) \\ &= (\phi_f^-, (V_f - V_{12}) \phi_i^+) + (\phi_f^-, V_{12} [1 + \frac{1}{E_f + i\eta - H_f} (H_f - H_i)] \chi_i) \\ &= (\phi_f^-, (V_f - V_{12}) \phi_i^+) + (\phi_f^-, (V_2 - V_{13} - V_{23}) \chi_i) - (\chi_f, (V_3 + K - E_i) \chi_i) \\ &= (\phi_f^-, (V_1 + V_{13} + V_2 + V_{23}) \phi_i^+) + i\eta (\chi_f, \chi_i) - i\eta (\phi_f^-, \chi_i) \\ &= (\phi_f^-, (V_1 + V_{13} + V_2 + V_{23}) \phi_i^+) \end{aligned} \quad (6)$$

ここに,

$$\begin{aligned} V_1 + V_{13} &= v_1 \\ V_2 + V_{23} &= v_2 \end{aligned} \quad (7)$$

とおけば, v_1 , v_2 はそれぞれ終状態に現われる陽子と残留核の相互作用である。

結局

$$M = (\phi_f^-, (v_1 + v_2) \phi_i^+) \quad (8)$$

とかけられる。

従って, 上述の反応行列を使い, 実験室系で, 入射粒子のエネルギー, 波数ベクトルをそれぞれ E_0 , \vec{k}_0 終状態での陽子のエネルギーと波数ベクトルをそれぞれ E_1 , E_2 および \vec{k}_1 , \vec{k}_2 とし, エネルギーおよび運動量の保存則は

$$E_0 = E_1 + E_2 + E_R + Q \quad (9)$$

$$\vec{k}_0 = \vec{k}_1 + \vec{k}_2 + \vec{k}_R \quad (10)$$

で表わされる。ここに Q は反応の Q 値である。ここで, He^3 核の質量を m_{He} とすると (He^3 , $2p$) 反応の断面積は

$$d\sigma = \frac{2\pi m_{\text{He}}}{\hbar^2 k_0} |M|^2 d\vec{k}_1 d\vec{k}_2 \delta(E_0 - E_1 - E_2 - E_R - Q) \quad (11)$$

で与えられる。

§ 3. He^3 (He^3 , $2p$) He^4 反応

§ 2 で得られた公式の応用例として, 実験結果が示されている He^3 (He^3 , $2p$) He^4 反応について計算してみる。

反応機構を明確にするため対応する Feynman グラフが Fig. 1. で示される。この反応の場合には,

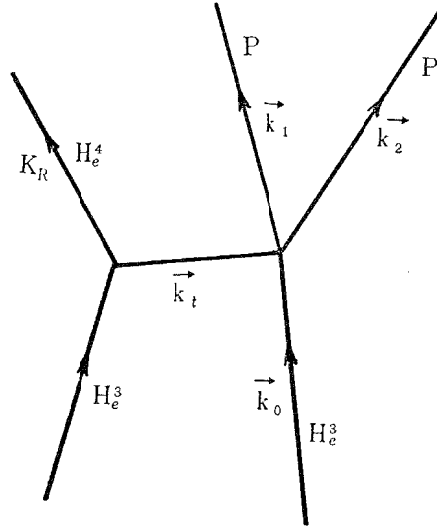


Fig. 1. Lowest order Feynman graph for the reaction $\text{He}^3(\text{He}^3, 2p)\text{He}^4$ with incoming He^3 particle wave number \vec{k}_0 , outgoing two protons \vec{k}_1 and \vec{k}_2 , recoil nucleus \vec{k}_R and momentum transfer \vec{k}_t .

(1)式は

$$\frac{d\tau}{d\Omega_1 d\Omega_2 dE_1 dE_2} = \frac{1}{2(2I_T + 1)} \cdot \frac{2\pi m^2 m_{\text{He}} k_1 k_2}{(2\pi\hbar)^6 k_0} |M|^2 \quad (12)$$

となる。ここに m は陽子の質量, I_T は標的核のスピンである。

計算法としては Cut-off Born 近似が用いられる。すると

$$\phi_f = \phi_a \cdot \chi_{2p} e^{-i\vec{k}_R \cdot \vec{r}_R} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \quad (13)$$

$$\phi_a = \sum_{\text{Spin and Core state}} \left(\frac{1}{2} m_3 \frac{1}{2} m_{\text{He}} \left| \begin{matrix} 00 \\ 00 \end{matrix} \right. \right) \psi_{\text{He}}(\xi_{\text{He}}) R_0(\xi) Y_{00}(\Omega_\xi) \psi_3$$

ここに, $\vec{r}, \vec{r}_R, \vec{\xi}$ をはじめ後に出て来る座標ベクトルは全て, 標的核の重心が初期状態で占めていた点からの陽子, 残留核, および中性子の位置ベクトル $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_R$ および \vec{r}_3 で表わされるものである。すなわち, $\vec{r} = \frac{1}{2}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2)$, $\vec{r}_3 = \frac{3}{4}(\vec{r}_3 - \vec{r}_R)$ である。(αβγδ | ab) は Clebsh-Gordan 係数である。函数 $\psi_{\text{He}}(\xi_{\text{He}})$, ψ_3 および ϕ_a はそれぞれ He^3 の内部動函数, He^4 粒子中の中性子の内部波動函数および He^4 の波動函数である。なお, Ω_ξ は $\vec{\xi}$ の立体角であり, 動径波動函数 R_0 は Cut-off 半径を ξ_0 にとるとき, つぎのように表わされると仮定される。

$$R_0(\xi) = \psi(\xi_0) \frac{h_0^{(1)}(i\kappa\xi)}{h_0^{(1)}(i\kappa\xi_0)} \quad : \xi \geq \xi_0 \quad (14)$$

ただし, $h_0^{(1)}$ は球 Hankel 函数 (1種0次), κ は He^4 粒子内の中性子の束縛エネルギーに対応する波数である。 $\psi(\xi_0)$ は Cutoff 半径 ξ_0 での中性子の動径函数である。(13)式中の χ_{2p} は終状態の二個の陽子の相対波動函数で, \vec{k} はその重心の波数ベクトルである。 χ_{2p} として Jackson and Blatt⁴⁾ に与えられている形を採用し,

$$x_{2p} = \frac{e^{-i\delta_k}}{K\rho} [cK\rho \cos \delta_k + \frac{1}{c} \sin \delta_k] \quad (15)$$

で与えられると仮定する。ここに, $\vec{K} = \vec{k}_1 - \vec{k}_2$, $\vec{\rho} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$, δ_k は S-波の P-P 散乱 phaseshift, および c は Coulomb 透過函数である。

また,

$$\psi_{i^+} = \psi_{He}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \psi_{He}(\xi_{He}) e^{\frac{i}{3}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3) \cdot \vec{k}_0} \quad (16)$$

で表わされるとすると, 行列は

$$\begin{aligned} M = & \Sigma \left(\frac{1}{2} m_3 \frac{1}{2} m_{He} \middle| 00 \right) \psi^*(\xi_0) \int d\tau \exp(-i\vec{k}_R \cdot \vec{r}_R) \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{r}) x_{2p}^* \times \\ & \times (v_1(\vec{r}_1 - \vec{r}_R) + v_2(\gamma_2 - \gamma_R)) \frac{h_0^{(1)}(i\kappa\zeta)}{h_0^{(1)}(i\kappa\zeta_0)} Y_{00}(\Omega\zeta) \exp\left\{ \frac{i}{3}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3) \cdot \vec{k}_0 \right\} \times \\ & \times \psi_{He}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \end{aligned}$$

となる。

位置ベクトルとして, $\vec{\rho}$, \vec{r}_R , $\vec{\zeta}$ および $\vec{s} = \vec{r}_3 - \frac{1}{2}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2)$ を用いるように変換すると, \vec{r}_R についての積分から運動量保存が出て来る。

He^3 の内部波動函数は

$$\psi_{He} = N_{He} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \gamma^2 [(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)^2 + (\vec{r}_2 - \vec{r}_3)^2 + (\vec{r}_3 - \vec{r}_2)^2] \right\} \quad (18)$$

ととられる。 N_{He} は規格仕定数で

$$N_{He} = 3^{3/4} \pi^{-3/2} \gamma^3 \quad (19)$$

であり, γ の値は電子散乱実験⁵⁾ から $0.31F^{-1}$, 基底状態のエネルギーを求める変分計算から⁶⁾ $0.39F^{-1}$ だからここでは平均値 $0.35F^{-1}$ をとる。

また, 陽子- α 間相互作用としては Sack 等⁷⁾ によって詳しく調べられているが, Cut off 近似を用いることと, 積分を可能にするため, つぎのように近似できると仮定する。上述のように座標変換を行なった結果

$$v_1 = v_1 \left(\frac{3}{4} \vec{\zeta} - \vec{s} + \frac{\vec{\rho}}{2} \right) \quad (20)$$

$$v_2 = v_2 \left(\frac{3}{4} \vec{\zeta} - \vec{s} - \frac{\vec{\rho}}{2} \right) \quad (21)$$

となる。ここで Henley⁸⁾ 等のとった近似と同様に α 粒子と二個の陽子の重心との距離にだけ依存する Gauss 型の中心力とする。

すなわち,

$$v_1 + v_2 \approx 2V_0 \exp\left\{ -\frac{1}{a^2} \left(\frac{3}{4} \vec{\zeta} - \vec{s} \right)^2 \right\} \quad (22)$$

更に, $\frac{1}{a}$ の大きな値に対しては, δ -函数型の相互作用で近似しても差して大きな誤差は生じない。ところで, Henley 等によると $a = 2.3F$, $V_0 = 47.3\text{Mev}$ と近似できる。そこで, 更めて,

$$v_1 \left(\frac{3}{4} \vec{\zeta} - \vec{s} + \frac{\vec{\rho}}{2} \right) \approx V_0' \delta \left(\vec{s} - \frac{\vec{\rho}}{2} \right) \quad (23)$$

$$v_2 \left(\frac{3}{4} \vec{\zeta} - \vec{s} - \frac{\vec{\rho}}{2} \right) \approx V_0' \delta \left(\vec{s} + \frac{\vec{\rho}}{2} \right) \quad (24)$$

と近似することにする。ただし, V_0' は k を ζ_0 で Cut することと, δ 函数型に近似することから

$$V_0' = \pi^{3/2} a^3 V_0 \exp\left(\frac{3}{4} \zeta_0\right) \quad (25)$$

ととられる。

従って、

$$M = N_{\text{He}} V_0' \psi^*(\zeta_0) \Sigma \left(\frac{1}{2} m_3 \frac{1}{2} m_{\text{He}} \mid 00 \right) \int d\tau \exp \left\{ i [(\vec{k}_0 - \vec{k}) \cdot \frac{3}{4} \vec{\zeta} - \left(\frac{2}{3} \vec{k}_0 - \vec{k} \right) \cdot \vec{s}] \right\} \times \\ \times x_{2p}^*(K\rho) \left(\delta \left(\vec{s} - \frac{\rho}{2} \right) + \delta \left(\vec{s} + \frac{\rho}{2} \right) \right) \frac{h_0^{(1)}(i\kappa\zeta)}{h_0^{(1)}(i\kappa\zeta_0)} Y_{00}(\Omega\epsilon) \exp \left\{ -\frac{\gamma^2}{2} \left(\frac{3}{2} \rho^2 + 2\delta^2 \right) \right\} \quad (26)$$

となる。ここで、 $\vec{\zeta}$ の積分が分離されるから残りを \vec{s} で積分すると、

$$M_1 = 2 \int d^3 \rho \cos \left\{ \left(\frac{1}{3} \vec{k}_0 - \frac{1}{2} \vec{k} \right) \cdot \vec{\rho} \right\} x_{2p}^*(K\rho) \exp \left\{ -2\gamma^2 \rho^2 \right\} \quad (27)$$

ここに、(26)式を代入し

$$M_1 = \frac{\pi^{3/2}}{2\gamma^2} e^{-i\delta\kappa} \left[\frac{C \cos \delta\kappa}{\sqrt{2} \gamma} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} \vec{k}_0 - \frac{1}{2} \vec{k} \right)^2 \right\} + \right. \\ \left. \frac{\sin \delta\kappa}{K C \Gamma \left(\frac{3}{2} \right)} {}_1F_1 \left(1, \frac{3}{2}; -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} \vec{k}_0 - \frac{1}{2} \vec{k} \right)^2 \right) \right] \quad (28)$$

となる。ここに Γ は Γ 函数を、 ${}_1F_1$ は合流超幾何函数である。

一方、 $\vec{\zeta}$ の積分は

$$M_2 = \int d^3 \zeta \exp \left\{ i [(\vec{k}_0 - \vec{k}) \cdot \frac{3}{4} \vec{\zeta}] \right\} h_0^{(1)}(i\kappa\zeta) Y_{00}(\Omega\epsilon) \quad (29)$$

とおいて、

$$Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}},$$

$$h_0^{(1)}(i\kappa\zeta) = -\frac{e^{-\kappa\zeta}}{\kappa\zeta}$$

であるから、 ζ_0 から ∞ までの積分ができて

$$M_2 = \zeta_0^2 h_0^{(1)}(i\kappa\zeta_0) \cdot \frac{8\sqrt{\pi}}{3(p^2 + \kappa^2)} \{ \kappa\zeta_0 j_0(p\zeta_0) - p\zeta_0 n_0(p\zeta_0) \} \quad (30)$$

となる。ここに j_0 , n_0 はそれぞれ 0 次の球ベッセル、球ノイマン函数である。また、 p は

$$p^2 = (\vec{k}_0 - \vec{k})^2 \quad (31)$$

である。

従って、

$$M = \frac{8\pi^{3/2} \zeta_0^2 e^{-i\delta\kappa}}{3\gamma^2 \{ (\vec{k}_0 - \vec{k})^2 + \kappa^2 \}} V_0' N_{\text{He}} \psi^*(\zeta_0) \Sigma \left(\frac{1}{2} m_3 \frac{1}{2} m_{\text{He}} \mid 00 \right) \times \\ \times \left[\frac{1}{4\gamma} \sqrt{\frac{\pi}{2}} C \cos \delta\kappa \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} \vec{k}_0 - \frac{1}{2} \vec{k} \right)^2 \right\} + \frac{\sin \delta\kappa}{K C} {}_1F_1 \left(1, \frac{3}{2}; -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} \vec{k}_0 - \frac{1}{2} \vec{k} \right)^2 \right) \right] \times \\ \times \{ \kappa j_0(p\zeta_0) - p n_0(p\zeta_0) \} \quad (32)$$

となる。

実験との比較をするため

He⁴ の結合エネルギー : 28.20 Mev.

He³ の結合エネルギー : 7.65 Mev.

ととなると, $\kappa = 0.85 \text{ F}^{-1}$ となる。

ここでまず, P-P coincidence を計算した。この場合には陽子のエネルギースペクトル傾向を比較すれば充分と思われるので, 角度に依存する因子だけを取り,

$$\left(\frac{1}{(k_0 - k)^2 + \kappa^2} \right)^2 \left[\frac{\pi c^2}{2^3 \gamma^2} \exp \left\{ - \left(\frac{\frac{1}{3} k_0 - \frac{1}{2} k}{2 \gamma} \right)^2 \right\} + \frac{1}{K^2 c^2} {}_1F_1 \left(1, \frac{3}{2}; - \left(\frac{\frac{1}{3} k_0 + \frac{1}{2} k}{8 \gamma^2} \right)^2 \right) \right]^2 \times \left\{ j_0(P\zeta_0) - \frac{P}{\kappa} n_0(P\zeta_0) \right\}^2 \quad (3)$$

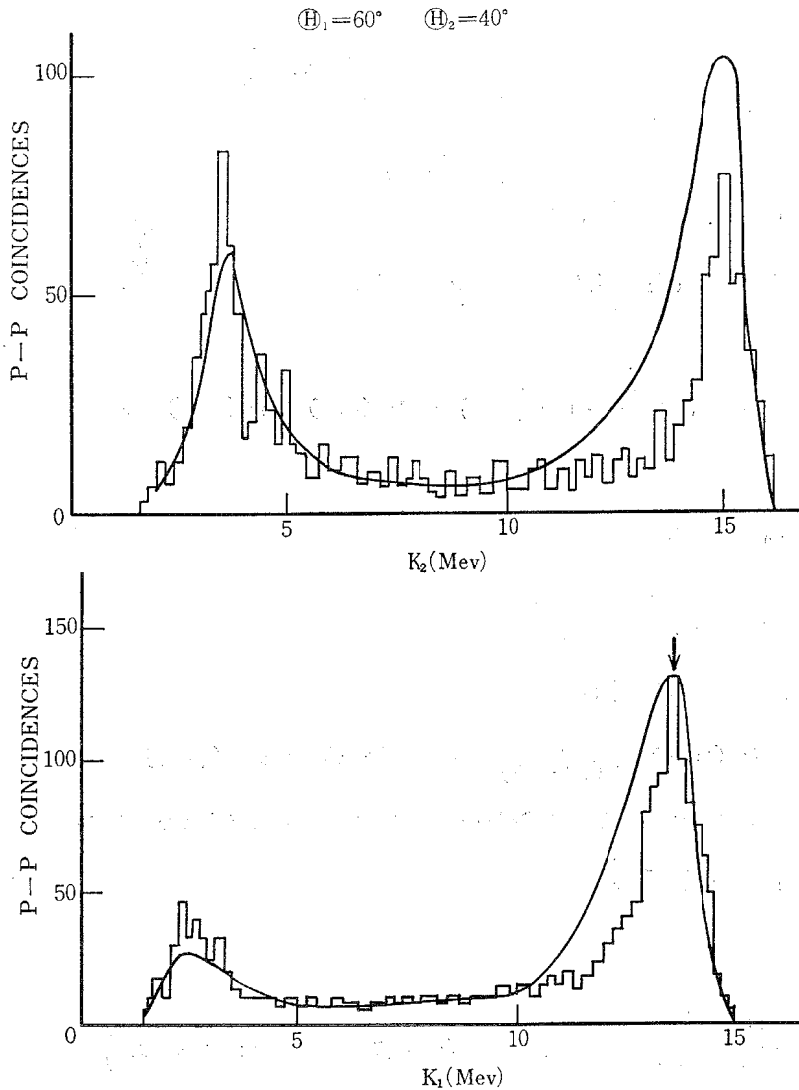


Fig. 2

Fig. 2. Projections of the coincident yield at moving counter angle of 40° for a fixed counter angle of 60° . The data are from Ref. 9. The curves are calculations of the energy spectra. An arrow indicates the normalization point.

を計算し、適当に規格された図が Fig. 2 に示されている。40°-60° coincident では、 c はほとんど 1 となり、大勢は

$$\left(\frac{1}{(\vec{k}_0 - \vec{k})^2 + \kappa^2} \right)^2$$

できめられ、2P の終状態相互作用はエネルギーの高い方を助長する傾向を示している。また Cut-off 半径 r_0 は 1.2 F で見積ったが、この値を大きくすると、エネルギーの低い方が山は小さく、高い方が幾分大きくなる傾向を示す。

つぎに、 \vec{k}_1 の角度を固定して、陽子 1 のエネルギースペクトルを計算するためエネルギー保存則と運動量保存則からつぎの式を得る。

$$E_0 = \frac{\hbar^2}{2m_\alpha} (\vec{k}_0 - \vec{k}_1 - \vec{k}_2)^2 + \frac{\hbar^2}{2m} (k_1^2 + k_2^2) + Q \quad (34)$$

ただし、 m_α は粒子の質量で、 $m_\alpha = 4m$ ととられる。この式を微分して

$$\frac{dk_2}{dE_0} = \frac{m}{\hbar^2} \left\{ \frac{5}{4} k_2 + \frac{1}{k_2} (\vec{k}_1 - \vec{k}_0) \cdot \vec{k}_2 \right\} \quad (35)$$

となる。(34) を (35) にかき、更に k_2^2 をかけると、 \vec{k}_2 の大きさについての積分が終ったことになるから、(34) から \vec{k}_1 の角度を固定し \vec{k}_2 の角度と \vec{k}_1 の大きさで k_2 を表わし、 \vec{k}_2 の角度で積分すればよいが、大変複雑

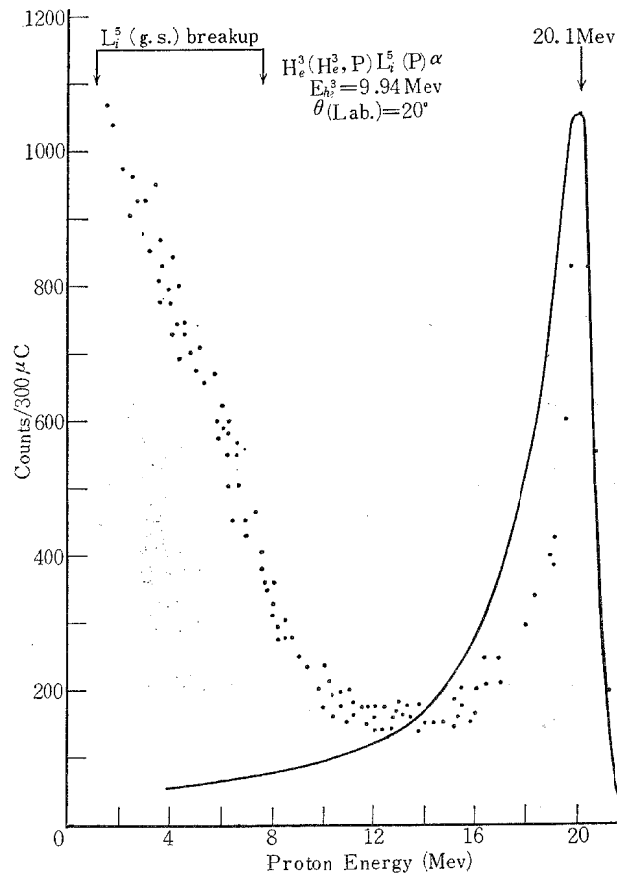


Fig. 3. A typical proton spectrum taken at a He³ bombarding energy of 9.94 Mev and a laboratory angle of 20°. Solid dots represent counts per channel in the observed spectrum. The data are from Ref. 10. The theoretical curve is normalized to a best fit.

なものになるので, ここに引用する価値があるかどうか疑わしい, 従って, 入射エネルギー 9.94 Mev. で \vec{k}_1 の角が実験室系で 20° の場合だけを Fig. 3 に示すことにする。

§ 4. 結 び

反応行列としては, 直接過程を扱ふ限り, 終状態相互作用を含むものとして妥当なものと思われる。この場合, とくに終状態が二個の陽子のときは束縛状態がないので都合がよい。工藤¹¹⁾, 阪本¹²⁾ は Cut-off Born 近似を用い $(\alpha, 2\alpha)$ $(P, 2\alpha)$ を α - α 散乱 phase shift を用いることによって, α - α の終状態相互作用を考慮している。しかし, ここに完式化された反応行列に入ってくるべき入射波は, 歪んだ波を使うべきであって, 後に行なった計算例には, 平面波が採用されている。これはあくまで第一近似であることは注意されねばならない。実験との比較に当って, 共に低エネルギー一部の不一致が見られるが, この部分は複合核か, あるいは, He^3 が陽子とその残りとに分かれ, 二粒子のストリッピングが起こり, 次いで中間状態の Li^3 が分かれて終状態をとる反応が寄与しているかも判らない。これらの点については将来充分研究される余地があろう。

最後に, 反応にあずかる相互作用として v_1, v_2 をとったが, 従来の方法は V_{13}, V_{23} をとり V_1, V_2 を小さいとして省略するか, V_1, V_2 を入射波の歪曲をきめる相互作用として扱って来たのである。しかし, この取扱いのように v_1, v_2 を とったとしても, Cut-off 近似のもとで, Fig. 1. の過程を考える限り規格化に寄与するだけであり, 規格化定数の変化はむしろ 1 に近づく方向にあることが推論されよう。しかし, この妥当性の検討も将来に残された課題であらう。

参 考 文 献

- 1) Demeur. M., 1954 : *Physica*, **20**. 1189.
- 2) Duncan. M., J.L. Duggan and R.D. Purrington, 1964 : *Phy. Rev.*, **134**. 164.
- 3) Heckrotte. W. and M. Mac Gregor, 1958 : *Phys. Rev.*, **111**. 593.
Komarv. V. and A. Popova, 1966 : *Nucl. Phys.*, **18**. 296.
Watson. K., 1952 : *Phys. Rev.*, **88**. 1163.
- 4) Jackson. J.D. and J.M. Blatt, 1950 : *Rev. Mod. Phys.*, **22**. 77.
- 5) Collard. H. and R. Hofstadter, 1963 : *Phys. Rev.*, **131**. 416.
- 6) Lasker. W., 1962 : *Ann. Phys. (N. Y.)* **17**. 436.
Tang. Y. C., E. Schmid and K. Wildermuth, 1963 : *Phys. Rev.* **131**. 2631.
- 7) Sack. S., L.C. Biedenhern and G. Breit, 1954 : *Phys. Rev.*, **93**. 321.
- 8) Henley E. M. and D.U.L. Yu, 1964 : *Phys. Rev.*, **133**. B. 1445.
- 9) Aldridge. J. P. III, B.H. Wildenthal and D.H. Youngblood, 1965 : *Rev. Mod. Phys.*, **37**. 430.
- 10) Bacher. A.D. and T. A. Tombrello, 1965 : *Rev. Mod. Phys.*, **37**. 433.
- 11) Kudo. Y., 1965 : *Prog. Theor. Phys.*, **34**. 942.
- 12) Sakamoto. Y., 1965 : *Nud. Phys.*, **66**. 531.