

# 低エネルギーに於ける重水素核の弾性散乱\*

柳 瀬 安 生

Elastic Scattering of Deuterons at Low Energies

By

Yasuo YANASE

The experimental data on the elastic scattering of 8.07 Mev. deuterons reported by I. J. von Heerden are analyzed by using the theory of the combined Coulomb and nuclear scattering and of the Blairs model, respectively. In order to obtain estimates of phase shifts by quick hand computation, the nuclear interaction used was the complex square well potential followed by the impulse approximation of the deuteron. From a comparison with the experimental results, it is found that the differential cross sections taking into account the nuclear interaction are in a better agreement than the case of the Blairs model.

## § 1 緒 論

種々の原子核による核子散乱の全断面積、弾性散乱の角分布等は相当広範囲のエネルギー領域に亘って研べられ、その結果いわゆる光学模型によって実験との一致が非常によく説明されることが知られている。然し核子の次ぎに単純な構造を持っていると考えられる重水素核の散乱については、実験的知識の乏しさもあるが、核子散乱にくらべると余りにも貧弱な知識しか得られていない現状である。そこで、このノートで比較的低エネルギーの重水素核の散乱を取扱い、実際例として幸にも最近  $\text{Ne}^{20}$  による重水素核散乱の低エネルギー data<sup>1)</sup> が発表されたので、ここで取扱って見ることにする。

重水素核の散乱を扱う場合、先づ考えられるのは Impulse 近似であろう。この近似は重水素核の構造が緩い束縛状態であるという先天的理由で可成りよい近似と思われる。然し他方束縛がゆるいということは外部相互作用の下で崩壊し易い事を意味している。次に重水素核は軽い荷電粒子である事を考慮すると、低エネルギー散乱には Coulomb 相互作用がかなり効くと想像される。これ等のことから低エネルギー弾性散乱に対して Blair<sup>2)</sup> は Coulomb 相互作用が支配的で、重水素核が或る程度以上標的核に接近した場合は核力の相互作用も効いて来るので重水素核は崩壊し重水素核の弾性散乱にはならないとして、微分断面積の実験に現はれる山と谷の位置を再現する事に成功したが山の高さ谷の深さが再現出来るように Coulomb 波の切断に附重因子をつけるという改良<sup>3)</sup> を行ったが、後方散乱に現われる山や谷は L-S Coupling

\* 水産講習所研究業績 第280号, 1959年7月7日 受理

を考慮しなければ駄目なようである。

最近 Blair 理論と対蹠的に Coulomb 相互作用を無視し、核子散乱の知識から得られた相互作用を使って、Impulse 近似の下で、(勿論エネルギーは幾分高い方であるが、散乱の様相は低エネルギーの場合と余り違いがないように思える)、L-S Coupling をも含めて非常によく実験を説明したのがあるが、この場合は部分波を20コも取り、調整のパラミターも可成り多い。ここでは低エネルギーということから Blair 理論に於ける如く Coulomb 相互作用を考慮し、Blair 理論に於いて切断され散乱に参与しないとされた部分波には Coulomb と核力の相互作用が働らくとして残しておくことにする。

以下三節に分けて夫々、§ 2 では Blair 理論の簡単な紹介をし、§ 3 では核力として採用する相互作用に就いて述べ、§ 4 で微分断面積がどのように表わされ、実験との比較がどのようになるが、例を Ne<sup>20</sup> の8.07 Mev 重水素核弾性散乱によつて研べて見ることにする。

## § 2 Blair 理論

この理論は元来  $\alpha$  粒子の弾性散乱に対して与えられたものであるが、重水素核の場合にも適用される、実際  $O^{16}(d, d)O^{16}$  の場合に適用して相当の成功が得られている<sup>5)</sup>。そこでこの理論の概略を述べることにする。勿論  $\alpha$  粒子に於けるように重水素核もこの場合は荷電中心と質量中心が一致していると、仮定する。この仮定は決して正しくはないのであるが、それによつて生ずる誤差は菊池氏の論文<sup>6)</sup> にも見られるようになりに小さいと思われる。更に  $\alpha$  粒子は Spin 0 であるが、重水素核の Spin は 1 であるという違いはあるが、このノートを通じて L-S Couplin を無視する立前であるからここでも重水素の Spin を無視することにする。

入射重水素核の重心系でのエネルギーを E、重水素核の半径を  $R_d$ 、標的核の原子番号を Z、半径  $R_N$  とすれば、channel 半径 R は

$$R = R_d + R_N \quad (1)$$

で与えられ、換算波長  $\lambda$  は

$$\lambda = \hbar / (2ME)^{\frac{1}{2}} \quad (2)$$

で与えられる。但し channel mass M は重水素核と標的核の換算質量である、即ち標的核、重水素核の質量を夫々  $M_N$ ,  $M_d$  とすると

$$M = (M_N + M_d)^{-1} M_N M_d \quad (3)$$

である。

純粋な Coulomb 散乱だけを考えるのであるが、良く知られているように  $\lambda/R \gg 1$  である場合には入射粒子の軌道として、古典的描像が可能である。従つて、古典描像での apsidal distance を D とすると D は次式で与えられる。

$$D = (Ze^2 / 2E) \left( 1 + \frac{1}{\sin \theta/2} \right) \quad (4)$$

ここに  $\theta$  は重心係での散乱角である。

ここで、 $D \leq R$  であるような領域での弾性散乱の微分断面積は部分波に展開して表わすと、一般に次式のようなになる。

$$d\sigma = \frac{\lambda^2}{4} \left| \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1)(\eta_{\ell}-1) P_{\ell}(\cos \theta) \right|^2 d\Omega \quad (5)$$

ここに、 $\ell$  は方位量子数、 $P_\ell$  は Legendre の多項式、 $\eta_\ell$  は phase shift と関係のある複素数で角運動量  $\ell$  を持って出て行く波の係数である。Coulomb 散乱の phase shift を  $\sigma_\ell$  とすると、 $\eta_\ell$  は

$$\eta_\ell = e^{2i\sigma_\ell} \quad (6)$$

として与えられる。従って純粹の Coulomb 散乱の微分断面積は

$$d\sigma = \frac{\lambda^2}{4} \left| \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) (e^{2i\sigma_\ell} - 1) P_\ell(\cos\theta) \right|^2 d\Omega \quad (7)$$

或は、

$$d\sigma = \frac{\lambda^2}{4} \left| \left[ -\ln/\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] e^{-\ln\ell n \sin^2\frac{\theta}{2} + 2i\sigma_0} \right|^2 d\Omega \quad (7')$$

と書き表わすことが出来る。但し

$$n = ze^2/\hbar v \quad (8)$$

$$v = (2E/M)^{\frac{1}{2}}$$

である。

Blair は入射粒子の部分波の中で channel radius よりも標的核に近づくような  $\ell$  を持った波は全部標的核に吸収され、結果として弾性散乱には全く寄与しないと仮定した。そこで斯たる  $\ell$  の最高を  $\ell'$  と書くことにすれば、 $\ell'$  は次式を計算する事によって求めることが出来る。

$$E = ze^2/R + \ell'(\ell'+1)\hbar^2/2MR^2 \quad (9)$$

そこで、上述の仮定に従うと

$$\begin{aligned} \eta_\ell &= 0 & \ell &\leq \ell' \\ \eta_\ell &= e^{2i\sigma_\ell} & \ell &> \ell' \end{aligned} \quad (10)$$

となり、結局重水素核弾性散乱の微分断面積を与える式として

$$d\sigma = \frac{\lambda^2}{4} \left| \left[ -\ln/\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] e^{-\ln\ell n \sin^2\frac{\theta}{2} + 2i\sigma_0} - \sum_{\ell=0}^{\ell'} (2\ell+1) e^{2i\sigma_\ell} P_\ell(\cos\theta) \right|^2 d\Omega \quad (11)$$

が得られる。

### § 3 相 互 作 用

上述の Blair 理論に於ける仮定は重水素核がゆるい束縛状態にあることを考慮すれば、或る程度はうなづける近似と思われる。しかし結果的に見れば、Coulomb 波を切断することによって干渉項を生み、それによって散乱断面積の山や谷を得ているのである故、同じような干渉項を得さえすればよいという立場からなら、寧ろ人為的な切断を行う代り、Coulomb 相互作用は斥力であるが、核力の方は引力である事を利用して、Impact parameter  $\leq R$  であるような部分波には Coulomb 力と核力の両者が作用すると考えた方が自然であろう。この際核力の方が Coulomb 力よりも強いから、切断の場合と幾分性質の類似した干渉項が得られるものと予想出来る。核力の相互作用を導入するにも重水素核と標的核の間の相互作用に於いては何らの知識も得られていない。ただ核子と原子核の間では相当詳しく研べられていて、光学模型が多くの成功を得ているに過ぎない。そこで核子と核との相互作用を用いて重水素核と割合重い核との間の相互作用を表わすことを試みよう。

N個の粒子から出来ている核に重水素核が入射する場合を考える。核力だけを問題にする立

場から、Coulomb 力は無視し、且つ核力は荷電独立だと仮定する。この場合原子核は基底状態にあり、Fermi 模型で表わされ得ると仮定しよう。すると全体系のエネルギーは次式で与えられる<sup>7)</sup>。但し多体力は考慮していない。

$$E(N+2) = \frac{3}{5} N \frac{p_F^2}{2m} + E_d + T_d + \frac{1}{2} \frac{\Omega_N}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k}_i \int d\mathbf{k}_j V_{ij} + \frac{1}{4} \int d\mathbf{k}_j V(ij)_N \Big|_{p_i = p_1} \\ + \frac{1}{4} \int d\mathbf{k}_j V(ij)_N \Big|_{p_i = p_2} + \frac{1}{2} \frac{\Omega_N}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k}_i \int d\mathbf{k}_j [V(ij)_{N+2} - V(ij)_N] \quad (2)$$

右辺の第1項は、核を構成している核子の運動エネルギーの和であり、 $p_F$  は基底状態での Fermi 運動量、 $m$  は核子の質量である。2項、3項は夫々重水素核のエネルギー固有値及び核に対する運動エネルギーである。4項は核の中の核子の位置エネルギーの和で、 $\Omega_N$  は核の規格化の体積、 $V_{ij}$  は  $i$  番目の粒子と  $j$  番目の粒子の相互作用、 $\mathbf{k}_i$  は  $i$  番目の粒子の運動量である。5、6項は重水素核の中の核子と  $N$  個で基底状態を作っている核の中の核子との相互作用エネルギーであり、 $p_1, p_2$  は重水素核の核子の運動量、添字の  $N$  は  $\mathbf{k}_j$  が  $\Omega_N$  の中に  $N$  の核子がつまっていたときに得られる Fermi 運動量を超えないことを意味している。最後の項は重水素核が核の体積  $\Omega_N$  内に入り込むことにより  $N$  個の粒子がとり得る Fermi 運動量に変化するそれに応じて生ずる核の位置エネルギーの変化高である。所で Fermi 運動量と粒子数の関係は核半径を  $R_N$  とすると、 $N$  が相当に大の時

$$(p_F)_{N+2} - (p_F)_N = \left( \frac{9\pi(N+2)}{8R_N^3} \right)^{\frac{1}{3}} - \left( \frac{9\pi N}{8R_N^3} \right)^{\frac{1}{3}} \approx \frac{2}{3N} (p_F)_N \quad (3)$$

となる、従って

$$V(ij)_{N+2} - V(ij)_N \approx \frac{2}{3N} \left[ p_F \frac{\partial V(ij)}{\partial p_F} \right]_N \quad (4)$$

(3)、(4)を(2)に代入すると、

$$E(N+2) = \frac{3}{5} N \frac{p_F^2}{2m} + E_d + T_d + \frac{1}{2} \frac{\Omega_N}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k}_i \int d\mathbf{k}_j V_{ij} + \frac{1}{4} \int d\mathbf{k}_j V(ij)_N \Big|_{p_i = p_1} \\ + \frac{1}{4} \int d\mathbf{k}_j V(ij)_N \Big|_{p_i = p_2} + \frac{1}{3N} \frac{\Omega_N}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k}_i \int d\mathbf{k}_j \left[ p_F \frac{\partial V(ij)}{\partial p_F} \right]_N \quad (12')$$

となる。

標的核の衝突前のエネルギーを  $E_0(N)$  とすると、

$$E_0(N) = \frac{3}{5} N \frac{p_F^2}{2m} + \frac{1}{2} \frac{\Omega_N}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k}_i \int d\mathbf{k}_j V(ij) \quad (15)$$

であるから、粒子1個当りの平均エネルギー  $E_{av}$  は

$$E_{av} = \frac{3}{5} (p_F^2/2m) + \frac{1}{2N} \frac{\Omega_N}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k}_i \int d\mathbf{k}_j V(ij) \quad (16)$$

で与えられる。そこで原子核の飽和条件式として、

$$p_F \left( \frac{\partial E_{av}}{\partial p_F} \right) = 0 \quad (17)$$

を導入すると、 $\Omega$  は  $p_F^{-3}$  に比例することを考え、

$$0 = \frac{6}{5} \frac{p_F^2}{2m} + \frac{1}{2} \left\{ - \frac{3\Omega_N}{(2\pi)^3 N} \int d\mathbf{k}_i \int d\mathbf{k}_j V(ij) + \frac{2\Omega_N}{(2\pi)^3} \cdot \frac{4\pi p_F^3}{N} \int d\mathbf{k}_j V(ij) \Big|_{p_i = p_F} \right\} \\ + \frac{1}{2} \frac{\Omega_N}{(2\pi)^3 N} \int d\mathbf{k}_i \int d\mathbf{k}_j p_F \frac{\partial V(ij)}{\partial p_F}$$

従って

$$\frac{\Omega_N}{(2\pi)^3 N} \int d\mathbf{k}_i \int d\mathbf{k}_j \left[ \text{PF} \frac{\partial V(\text{ij})}{\partial \text{PF}} \right]_N = - \left( \frac{\text{PF}^2}{2m} + \frac{6}{N} E_0(N) - \frac{2\Omega_N}{(2\pi)^3} \frac{4\pi \text{PF}^3}{N} \right) \times \int d\mathbf{k}_j V(\text{ij}) \Big|_{p_i = \text{PF}} \quad (18)$$

となる。これを (12') に代入し、他方  $E(N+2)$  は

$$E(N+2) = E_0(N) + E_d + T_d + W \quad (19)$$

で表わされる筈であるから、(12') 式から得られる式と(19)とを比較することによって、重水素核と核との相互作用エネルギー  $W$  を求めると、

$$W = \frac{1}{4} \int d\mathbf{k}_j V(\text{ij})_N \Big|_{p_i = p_1} + \frac{1}{4} \int d\mathbf{k}_j V(\text{ij})_N \Big|_{p_i = p_2} - 2 \frac{\text{PF}^2}{2m} + \frac{2}{N} E_0(N) - \frac{2\Omega_N}{3(2\pi)^3} \cdot \frac{4\pi \text{PF}^3}{N} \int d\mathbf{k}_j V(\text{ij}) \Big|_{p_i = \text{PF}} \quad (20)$$

ここに

$$4\Omega_N \left( \frac{4}{3} \frac{\pi \text{PF}^3}{(2\pi)^3} \right) = N \quad (21)$$

なることを考慮して

$$W = \frac{1}{4} \int d\mathbf{k}_j V(\text{ij})_N \Big|_{p_i = p_1} + \frac{1}{4} \int d\mathbf{k}_j V(\text{ij})_N \Big|_{p_i = p_2} - 2 \frac{\text{PF}^2}{2m} + \frac{2}{N} E_0(N) - \frac{1}{2} \int d\mathbf{k}_j V(\text{ij})_N \Big|_{p_i = \text{PF}}$$

右辺の 3, 4, 5 項は基底状態にある核内で丁度 Fermi 準位にある核子を考えて、お互いに消える筈のものである。従って

$$W = \frac{1}{4} \int d\mathbf{k}_j V(\text{ij})_N \Big|_{p_i = p_1} + \frac{1}{4} \int d\mathbf{k}_j V(\text{ij})_N \Big|_{p_i = p_2} \quad (22)$$

となる。即ち重水素核と標的核の相互作用エネルギーは、重水素構成の核子夫々と標的核との相互作用エネルギーの和に等しいと云うことである。このことから重水素核と標的核との相互作用に Impulse 近似を採用することにしても大きな誤りは生じないだろうと思われる。

#### § 4 散乱微分断面積

前節で述べられたように、Impact parameter が channel radius よりも小さい部分波には、Coulomb 相互作用の他に、Impulse 近似で得られる核力の相互作用  $V$  が働らくことになるから、 $V$  による phase shifts を  $\delta_\ell$  とすれば、(10)の  $\eta_\ell$  は次のように書き換えられる。

$$\eta_\ell = e^{2i(\sigma_\ell + \delta_\ell)} \quad \ell \leq \ell'$$

$$\eta_\ell = e^{2i\sigma_\ell} \quad \ell > \ell'$$
(23)

従って散乱微分断面積も次のように変更を受ける。

$$d\sigma = \frac{\lambda^2}{4} \left[ \ln \left| \sin^2 \left( -\frac{\theta}{2} \right) \right| e^{-\ln \ell n \sin^2 \left( \frac{\theta}{2} \right)} + \sum_{\ell=0}^{\ell'} (2\ell+1) (e^{2i\delta_\ell} - 1) e^{2i(\sigma_\ell - \sigma_0)} P_\ell(\cos \theta) \right]^2 d\Omega \quad (24)$$

最後に実際例として、 $\text{Ne}^{20}(\text{d},\text{d})\text{Ne}^{20}$  を Blair 模型と(24)式とで微分断面積を計算し、比較して見ることにしよう。実験が行なわたのは入射重水素のエネルギーは実験室系で8.07 Mev. であるから、重心系に直すと7.34 Mev. となる。次に  $\text{Ne}^{20}$  の核半径、重水素核の核半径を夫々  $4.1 \times 10^{-13} \text{ cm}$ ,  $2.3 \times 10^{-13} \text{ cm}$  として計算すると、 $\ell'$  として3.78位の値が得られるから

$$\ell' = 4$$

と取ることにして Blair の式で計算すると図の点線で示されている様な結果が得られる。

又(24)式で計算を行う場合には、Blair の場合と同じ数値を採用し、更に核相互作用を選ばねばならない。既述のように Impulse 近似が用いられるので、phase shift の計算が簡単に行なえるという制約の下に核子に対する核の相互作用の型として箱型の光学模型を採用することにし、入射エネルギーを考慮して、<sup>8)</sup> 重水素に対する核相互作用の実数部分の深さを求めて見ると大体110Mev となる。虚数部分の深さは重水素核が容易に崩壊し得るという事実もあるが、ここでは常識通り実数部とのかね合いで5 Mev として採る。しかし phase shift の計算には簡単な箱型の相互作用であっても複素相互作用であるためにかなり面倒な数値計算を行わなければならないが、幸にもこの場合には Sokoloff Hamermesh<sup>9)</sup> によつて変分法で得られた次の如き式があるのでそれを採用する、即ち

$$\tan \delta_\ell = \frac{\frac{1}{2} \lambda K (j_\ell^2 - j_{\ell-1} j_{\ell+1})}{1 + \frac{\lambda}{K^2} \left[ \frac{2\ell+3}{4} - \frac{1}{2} \frac{j_\ell^2}{j_\ell^2 - j_{\ell-1} j_{\ell+1}} + \frac{(-1)^{\ell+1}}{2} K^3 (j_\ell j_{\ell-1} - 1 + j_{\ell+1} j_{\ell-1}) \right]} \quad (25)$$

但し、

$$K^2 = 2MER^2 / \hbar^2$$

$$\lambda = 2MVR^2 / \hbar^2$$

$$V = U_1 + iU_2$$

で  $U_1$  は相互作用の実数部の深さ、 $U_2$  は虚数部の深さであり、 $j_\ell$  は  $\ell$  次の Spherical Bessel 函数である。

以上の手続きで  $\sigma_\ell$  を求め(24)式より  $\frac{d\sigma}{d\Omega}$  を求めた結果は図に鎖線で示されている。なお、図の曲線は実験値を連ねたものである。

## § 5 結 び

重水素核と標的核との間に作用する核の相互作用を構成する場合に、虚数部に特別な注意を払わなかったが、良く知られているように重水素核は緩い束縛状態にあるため、Coulomb 相互作用の下でも崩壊する可能性がある故実際の数値計算では虚数部の深さを 20Mev 迄変えて変化を調べて見たが、虚数部の変動による変化は殆んど現われません又実数部分に於いても核子散乱に見られる程全体の左右移動は起らない。

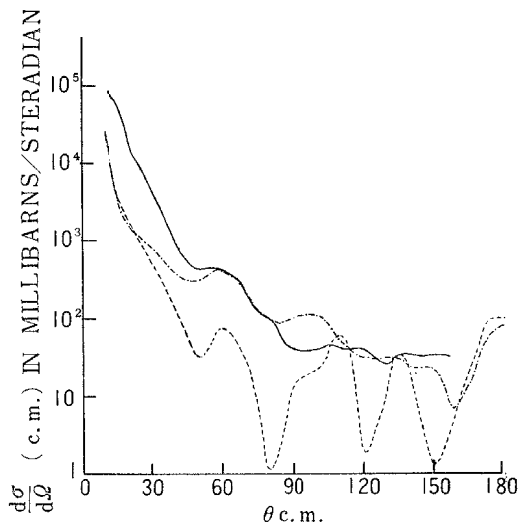


Fig. 1. The differential elastic scattering cross section of deuteron by  $\text{Ne}^{20}$  in the center-of-mass system, where the incident deuteron energy is 8.07 Mev. in the laboratory system. Experimental data are represented by the solid line. The dashed line is that calculated from the Blair's theory. The other broken line is the theoretical curve calculated from the eq. (24), with the parameters  $U_1 = 110 \text{ Mev.}$ ,  $U_2 = 5 \text{ Mev.}$ , and  $R = 6.4 \times 10^{-13} \text{ cm}$ .

(25)式を用いて phase shift を求めたが、(25)式による計算値は一般に前方では小さ過ぎる値を与える傾向がある。しかし光学模型を採用する限りでは phase shift の計算は非常に面倒になり電子計算機が専ら活躍を行っているのが現状、かような状態の下で核子に対する最もよい複素相互作用は箱型ではなくて Woods-Saxon 型であるということが知られていてもそれを採用する訳けにはいかず、箱型で(25)式採用となった。従って Blair 理論も Coulomb 波を diffuse cut-off にしなかったのであるが、若し核の表面をぼかして取るならば前方も実験値に幾分近づけるものと思われる。この可能性は channel radius を小さくすれば計算値が前方では大となることから予想される。次に後方にて計算値は相当大きな谷を生じているが、この谷は L-S coupling を導入すると浅くなるということが一般に知られているので、ここでは問題にしなかった。

最後に、図に示されている実験値の曲線は彼等の実験値<sup>10)</sup>を忠実に曲線で連ねたものであるから Nuclear Physics に発表されている曲線の如く滑らかなものとならなかったことを附記しておく。

## 文 献

- 1) von HEERDEN, I. J. : 1958. *Nuclear Physics*, Vol. **6**. 55.
- 2) BLAIR, J. S. : 1954. *Phys. Rev.*, **95**. 1218.
- 3) PORTER, C. E. : 1955. *Phys. Rev.*, **99**. 1400.
- 4) WATANABE, S. : 1958. *Nuclear Physics*, Vol. **8**. 484.
- 5) EGUCHI, T. : 私信.
- 6) KIKUCHI, K. : 1957. *Prog. Theor. Phys.*, **18**. 503.
- 7) BRUECKNER, K. A. : 1958. *Phys. Rev.*, **110**. 597.
- 8) 1957. Hintz Report of Pittsburgh Conference.
- 9) SOKOLOFF, J. and M. HAMERMESH : 1957. *Ann. Phys.*, **2**. 157.
- 10) von HEERDEN, I. J. : 私信.