

張力変動を受ける歯付きベルトの振動*¹大崎 栄喜*²・古賀 勝之*³・三好 佳廣*⁴

Vibration of Timing Belt Subjected to Fluctuations of Tension

Eiki Osaki*², Katuyuki Koga*³, and Yoshihiro Miyoshi*⁴

It is well known that timing belts are subjected simultaneously to forced displacement and a fluctuation of tension which are caused by the eccentricity of the pulley shaft, impacts of the encounter and detachment of the timing belt and the pulley, and the fluctuation of torque given to the pulley shaft. This paper describes the results of analytical and experimental investigations of the regions of resonance with subharmonic oscillations of the order 1/2 of the parametric excitation of a timing belt. The resonance treated in this report is one of the resonances excited under parametric excitation by the influence of the tension fluctuation upon one end of a timing belt stretched vertically. The experimental results nearly agreed with the analytical results.

1 はじめに

歯付きベルトは、低騒音で柔軟性にすぐれ、回転精度や伝達効率がローラチェーンに比べて良いため、動力伝達およびタイミング機構用として幅広く使用されている。この歯付きベルトは、トルク変動やベルトとプーリの歯がかみ合うときに生じる周期的な張力変動が起因して、しばしば激しい横振動を発生する。この現象はいわゆるパラメータ励振の形態と考えられ、横方向の励振とは異なって、共振周波数領域に幅がありきわめて激しい横振動となり、大振幅の非線形振動に発展する危険性がある。その防止対策の確立のために、振動発生機構の解明が必要と考えられる。

従来、歯付きベルトの振動に関しては、強制振動¹⁾、わずかな張力変動が加わる場合のパラメータ励振²⁾ および強制パラメータ共振³⁾について報告されているが、その挙動が複雑なため、十分に満足する結果が得られていない。そこで、本報では、垂直に張られた歯付きベルトの端部に正弦的な張力変動が加わる時に発生する横振動の挙動を実験的に検討し、あわせて理論的解析⁴⁾を行い実験結果と比較検討した。解析にあたっては、歯付きベルトを弦と考慮して、走行速度の影響を無視した運動方程式からその挙動をマシューの方程式に導き、周期的な張力変動によるパラメータ励振が横振動を発生させること、およびその発生条件はマシュー安定判別線図を用いて容易に決定できることを明らかに

水産大学校研究業績 第1552号, 1996年6月20日受付.

Contribution from National Fisheries University, No.1552. Received Jun. 20, 1996.

*¹ 日本船舶機関学会平成7年度学術講演会にて発表

*² 水産大学校機関学科計測・制御工学講座 (Laboratory of Instrument and Control Engineering, Department of Marine Engineering).

*³ 水産庁 (Fisheries Agency).

*⁴ 水産大学校練習船耕洋丸 (Training Ship Koyo-Marun, National Fisheries University).

かにした。とくに、激しい横振動が持続して危険性がたか
いと考えられる、張力変動の振動数がベルトの固有振動数
の2倍近傍で発生する、いわゆる1/2次分調共振の発生
限界についてマシュー方程式から求めた1/2次分調共振
発生領域と実験値とを比較検討した結果、線形振動の範囲
では両者はほぼ一致したので報告する。

2 主な記号

本報で使用する主な記号は下記のとおりである。

L : 供試ベルトのスパンの長さ [m]

m : 供試ベルトの単位長さ当たりの質量 [kg/m]

T_0 : 初期設定張力 [N]

ΔT : 周期的に加わる張力変動 [N]

x : 歯付きベルトの長手方向の距離 [m]

y : 供試ベルトの横方向の変位 [m]

ω : 張力変動の励振角振動数 [rad/s]

$f = \omega / 2\pi$ [Hz]

ω_0 : 供試ベルトの1次固有角振動数 [rad/s]

$= \pi c / L$

$f_0 = \omega_0 / 2\pi$ [Hz]

$c = (T_0 / m)^{1/2}$ [m/s]

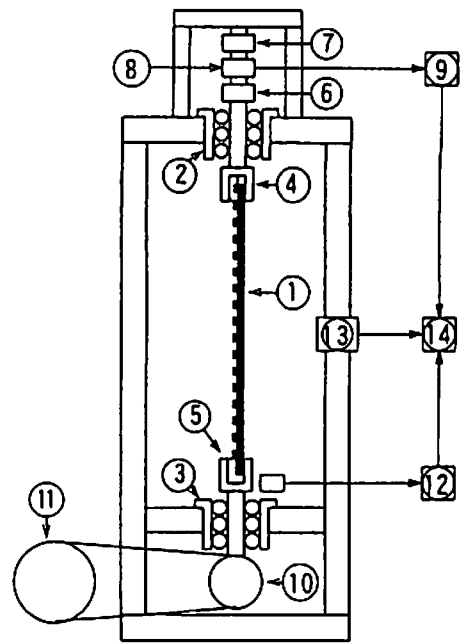
ω_n : 分離定数

$\Omega = \omega / \omega_0$

$\epsilon = \Delta T / T_0$

Ea : 供試ベルトのヤング率と断面積との積 [N]

つれて非線形性の影響で激しい振動が持続するため、ある
程度回転数を上げた後、供試ベルトを手でかく拘束して
振動をとめた。その後、回転数を徐々に下げていき跳躍現
象が起きる励振振動数を見つけることにより線形振動が発
生する上限を調べた。なお、偏心カムによる長手方向の変
位は渦電流式変位計⑫、供試ベルトの1次モードの振動は
供試ベルトスパンの中央でレーザ式変位計⑬を用いて測定
し、これら全ての測定信号は電磁オシログラフ⑭で記録し
た。



①Test belt, ②Ball spline, ③Ball spline, ④Upper end chuck, ⑤Lower end chuck, ⑥Ball joint, ⑦ Ball joint, ⑧Load cell, ⑨Strain meter, ⑩Eccentric cam, ⑪Variable speed motor, ⑫Eddy current type displacement meter, ⑬Laser type displacement meter, ⑭Electromagnetic oscillograph recorder

Fig. 1 Schematic diagram of experimental apparatus

3 実験装置および方法

実験装置の概略を Fig. 1、供試ベルトの形状を Fig. 2、寸法と機械的特性を Table 1 にそれぞれ示す。Fig. 1 に示すように、なめらかに上下するボールスプライン②、③に固定した上端チャック④と下端チャック⑤の間に垂直に取り付けた供試ベルト①に、ボールジョイント⑥および⑦を回転させて初期張力を与える。初期張力の大きさは張力計⑧で検出し、ひずみ測定器⑨で計測する。初期張力を与えた後、偏心カム⑩を可変速モータ⑪で徐々に回転し、供試ベルトの下端に長手方向の正弦的な張力変動を加える。実験ではまず、供試ベルトに加える周期的な張力変動 ΔT の値を偏心カムの偏心量を一定にして、可変速モータを1 Hz程度で回転させて求めた後、回転数を徐々に上げていくとパラメータ励振による振動が発生する。この振動の中でも、とくに1/2次分調共振は、励振振動数を上昇していくに

4 実験結果

Fig. 3 から 6 に供試ベルト A、B および C の 1 次モードにおける1/2次分調共振の振幅特性の一例を示す。図中、横軸 Ω は供試ベルトの固有角振動数 ω_0 と張力変動の励振角

振動数 ω との比、縦軸 M は供試ベルトの1次モード（ベルトスパンの中央）の振動振幅とベルトスパン610mmの長さとの比、○印は励振振動数を徐々に上げていくと発生する振動、●印は励振振動数を下げていくときに発生する振動、矢印は跳躍した方向をそれぞれ示す。Fig. 3 (a) は供試ベルトAに初期張力 $T_0 = 19.6 \text{ N}$ ($f_0 = 16.1 \text{ Hz}$)、張力変動 $\Delta T = 2.94 \text{ N}$ を与えたとき、Fig. 3 (b) は $T_0 = 39.2 \text{ N}$ ($f_0 = 22.3 \text{ Hz}$)、 $\Delta T = 4.41 \text{ N}$ を与えたときの振幅特性である。Fig. 4 (a) は供試ベルトBに $T_0 = 19.6 \text{ N}$ ($f_0 = 13.5 \text{ Hz}$)、 $\Delta T = 3.04 \text{ N}$ を与えたとき、Fig. 4 (b) は $T_0 = 39.2 \text{ N}$ ($f_0 = 20.2 \text{ Hz}$)、 $\Delta T = 4.9 \text{ N}$ を与えたときの振幅特性である。

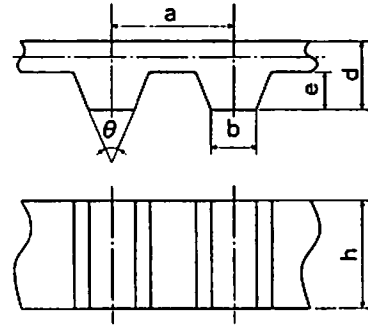
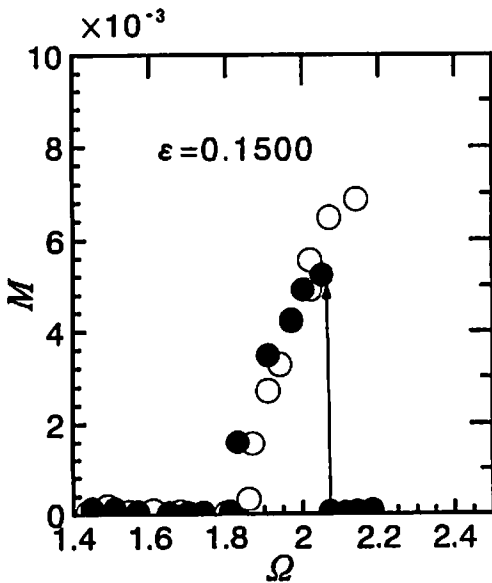


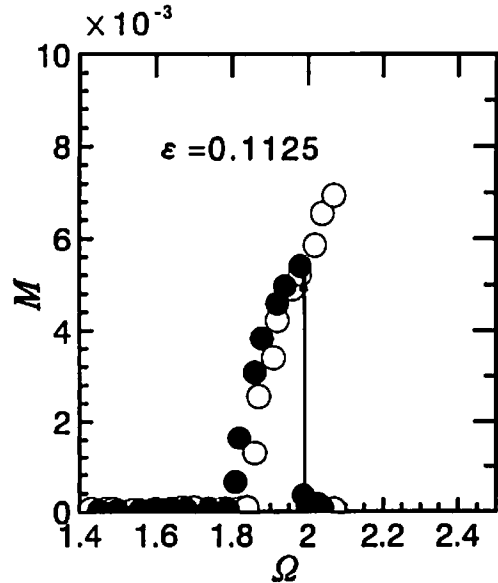
Fig. 2 Test belt configuration

Table 1 Dimensions and properties

Test belts	a [mm]	b [mm]	θ [°]	d [mm]	e [mm]	h [mm]	Ea [N]	m [kg/m]
A	9,525	3,25	40	3,62	1,91	12,7	$10,45 \times 10^4$	$5,08 \times 10^{-2}$
B	9,525	3,25	40	3,62	1,91	19,0	$11,50 \times 10^4$	$6,41 \times 10^{-2}$
C	9,525	3,25	40	3,62	1,91	24,5	$19,50 \times 10^4$	$9,36 \times 10^{-2}$



(a) $T_0 = 19.6 \text{ N}$, $\Delta T = 2.94 \text{ N}$



(b) $T_0 = 39.2 \text{ N}$, $\Delta T = 4.41 \text{ N}$

Fig. 3 Parametric resonance of test belt A

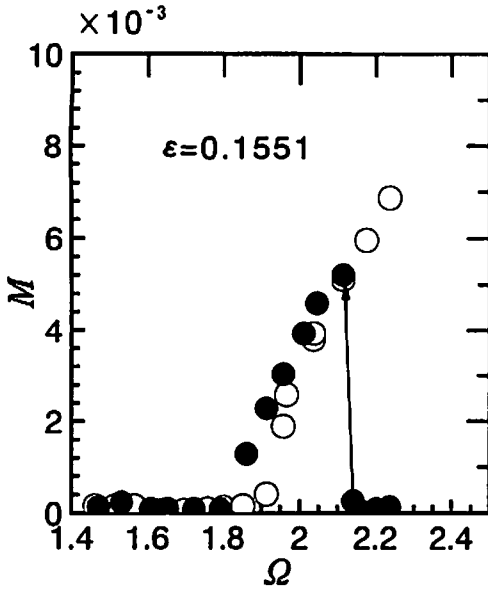
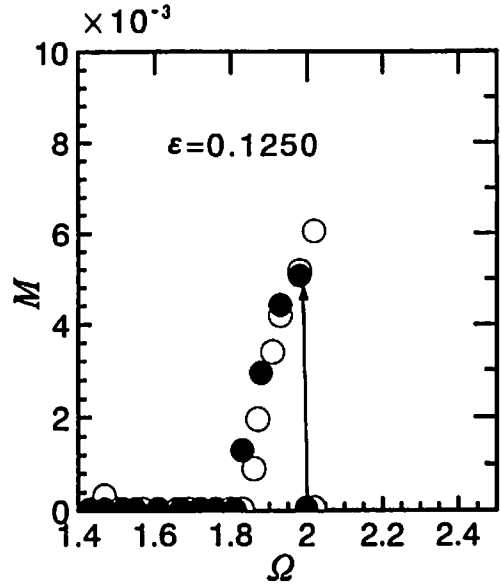
(a) $T_0 = 19.6 \text{ N}$, $\Delta T = 3.04 \text{ N}$ (b) $T_0 = 39.2 \text{ N}$, $\Delta T = 4.90 \text{ N}$

Fig. 4 Parametric resonance of test belt B

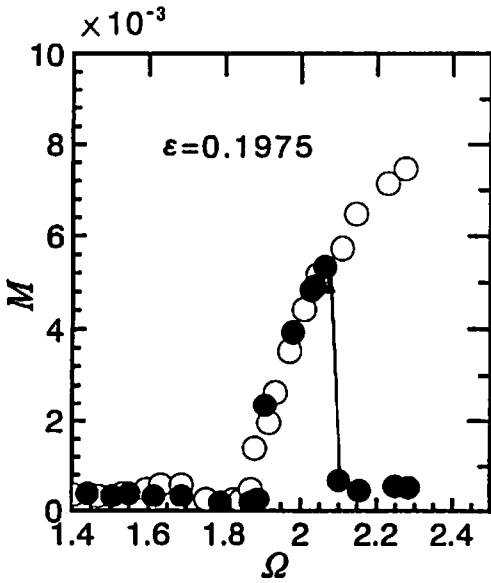
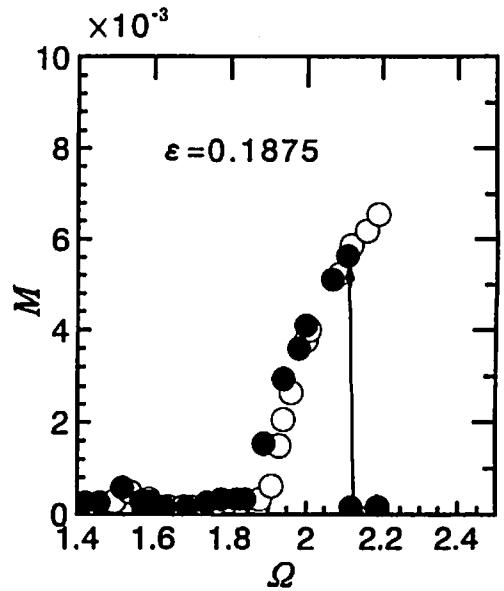
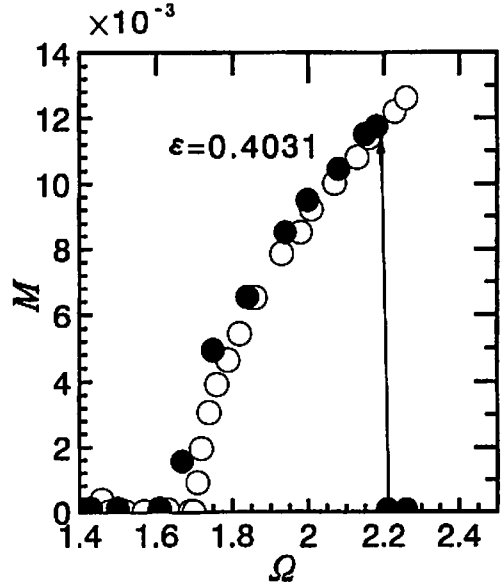
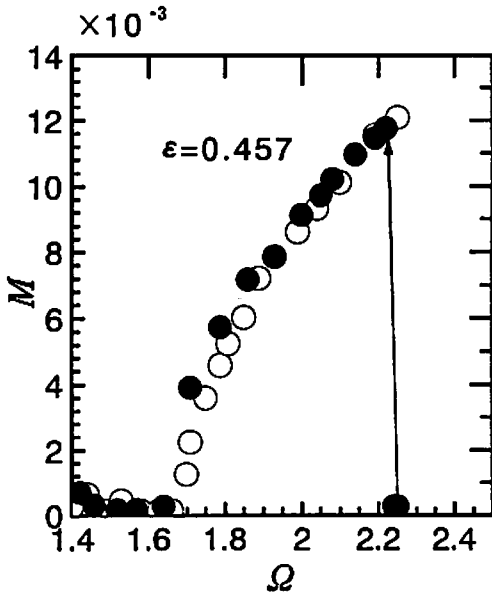
(a) $T_0 = 19.6 \text{ N}$, $\Delta T = 3.87 \text{ N}$ (b) $T_0 = 39.2 \text{ N}$, $\Delta T = 7.35 \text{ N}$

Fig. 5 Parametric resonance of test belt C

Fig. 5 (a) は供試ベルト C に $T_0 = 19.6 \text{ N}$ ($f_0 = 11.86 \text{ Hz}$), $\Delta T = 3.87 \text{ N}$ を与えたとき, Fig. 5 (b) は $T_0 = 39.2 \text{ N}$ ($f_0 = 16.1 \text{ Hz}$), $\Delta T = 7.35 \text{ N}$ を与えたときの振幅特性である。

る。なお, 励振振動数を上げていくと振動が持続したので, 固有振動数のほぼ 2 倍近傍で供試ベルトを手で軽く拘束して振動をとめた後, 励振振動数を下げていき, このときに跳躍が起きた Ω の値を線形振動発生の上限とした。



(a) Test belt A ($T_0 = 39.2 \text{ N}$, $\Delta T = 17.93 \text{ N}$)

(b) Test belt B ($T_0 = 39.2 \text{ N}$, $\Delta T = 15.8 \text{ N}$)

Fig. 6 Parametric resonance of test belt A, B

Fig. 3 から 5 の振動特性をそれぞれ比較すると, 供試ベルトの種類に関係なく, ϵ の値が大きくなると, 固有振動数の 2 倍近傍で発生する 1/2 次分数調和振動の共振領域が広くなるとともに, 右方向への傾きが大きくなり非線形性が強くなることからわかる。Fig. 6 は ϵ の値が Fig. 3 から 5 に比べて大きな場合の振幅特性を示す。Fig. 6 (a) は供試ベルト A に $T_0 = 39.2 \text{ N}$, $\Delta T = 17.93 \text{ N}$ を与えたとき, Fig. 6 (b) は供試ベルト B に $T_0 = 39.2 \text{ N}$, $\Delta T = 15.8 \text{ N}$ を与えたときの振幅特性である。Fig. 3 (b) と Fig. 6 (a), および Fig. 4 (b) と Fig. 6 (b) の特性をそれぞれ比較すると, 初期張力 T_0 が同じ値であっても, ϵ の値が大きくなると, 固有振動数の 2 倍近傍で発生する 1/2 次分数調和振動の振幅が増大することがわかる。また, 1/2 次分数調和振動は, 励振振動数を上げていくにつれて激しい振動が持続し, その発生領域も一層広くなるとともに, 右方向への傾きも大きくなりハードスプリングの非線形特性が顕著にな

5 理論解析

Fig. 7 に示すように, 供試ベルトが鉛直な状態で上端および下端が y 方向に移動しないように固定されているものとする。この供試ベルトに初期張力 T_0 , およびその上端にベルトの長手方向 (x 方向) に, 時間に関して周期的な張力変動として $\Delta T \sin \omega t$ が加わるとする。供試ベルトを弦と考えると, 振動の運動方程式は, 弦の波動方程式を用いて次式で表すことができる。

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 2\mu \frac{\partial y}{\partial t} = c^2 (1 + \epsilon \sin \omega t) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \dots\dots\dots (1)$$

ただし, $2\mu = \nu/m$, ν は減衰係数である。
ここで, $y = F(x)G(t)$ において変数分離すると,

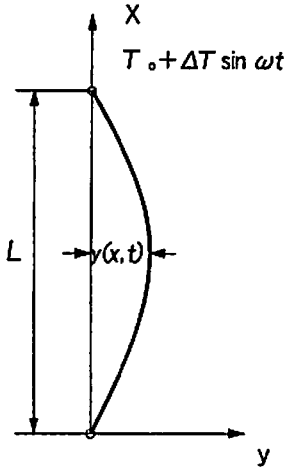


Fig. 7 Vibration model of timing best

式(1)は次式のように表すことができる。

$$\frac{d^2 F}{d x^2} + \left(\frac{\omega_n}{c}\right)^2 F = 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\frac{d^2 G}{d t^2} + 2\mu \frac{d G}{d t} + \omega_n^2 (1 + \varepsilon \sin \omega t) G = 0 \quad \dots\dots\dots (3)$$

式(2)の一般解を次式とおく、

$$F = C_1 \sin(\omega_n/c)x + C_2 \cos(\omega_n/c)x$$

ここで、上式の境界条件として両端固定 $F(0) = F(L) = 0$ とすると、 $\omega_n = n\pi c/L$ となり、 $n = 1$ のとき $\omega_n = \omega_0$ である。式(3)はパラメータ励振を表すマシュー方程式であり、この場合一般に、固有振動数の2倍近傍で発生する1/2次分数調和振動が優勢となることが知られているので、これについて検討する。ここで式(3)の定常解として近似的に次のようにおく。

$$G = A \cos \frac{1}{2} \omega t + B \sin \frac{1}{2} \omega t \quad \dots\dots\dots (4)$$

式(4)を式(3)に代入して \cos , \sin の項をそれぞれ0に等置して A , B を消去し、式(4)の運動が存在するための条件から、次式が成立する。

$$\frac{\omega}{2} = \left[\omega_n^2 - 2\mu^2 \pm \left\{ (\omega_n^2 - 2\mu^2)^2 - \omega_n^4 + \left(\frac{\omega_n^2 \varepsilon}{2}\right)^2 \right\}^{1/2} \right]^{1/2} \quad \dots\dots\dots (5)$$

式(5)において $\zeta = \mu/\omega_n$, $\Omega = \omega/\omega_n$ とおき整理すると次式のようになる。

$$\Omega^2 = 4 \left\{ (1 - 2\zeta^2) \pm \left(4\zeta^2 - 4\zeta^2 + \frac{\varepsilon^2}{4} \right)^{1/2} \right\} \quad \dots\dots (6)$$

ここで、摩擦係数 ν の値が非常に小さな値とすると ζ を無視することができるので、1/2次分数調和振動の発生限界は、式(6)から次式のような近似式で表すことができる。

$$\Omega^2 = 4 \pm 2\varepsilon \quad \dots\dots\dots (7)$$

6 振動発生領域

4. で述べたように、張力変動を受ける歯付きベルトの振動には、いわゆるパラメータ励振とよばれる振動形態があり、中でも張力変動の励振振動数が固有振動数の2

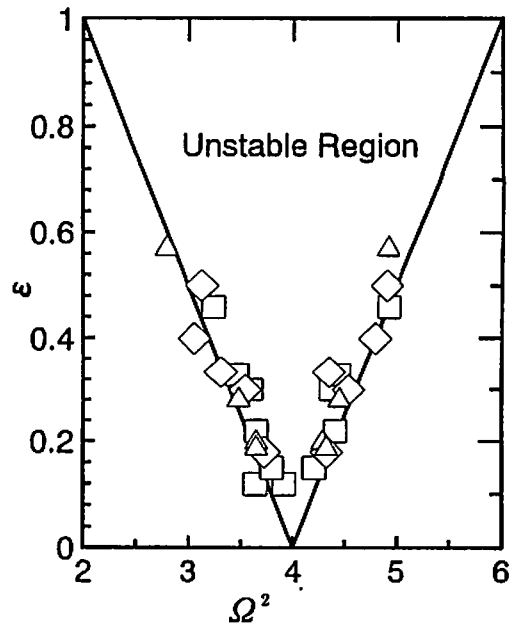


Fig. 8 Ω^2 and ε curve in the unstable region

倍近傍で持続する激しい横振動が危険である。そこで1/2次分数調和振動(1次モード, $n=1$, $\omega_n=\omega_0$)の発生限界を、マシュー方程式から求めた式(7)による計算結果と実験から得られた結果をFig. 8に示した。図中、実線は式(7)から求めた1/2次分数調和振動の発生限界、□印、◇印および△印は供試ベルトA, B, Cの実験結果を示す。なお、実験における振動発生領域の下限振動数は、振幅 M が 2×10^{-3} 近傍の Ω の値を用いた。Fig. 8から、使用した3種類の供試ベルトにおいて、 ε の値がほぼ0.2~0.6までの範囲では、マシュー方程式で求めた振動発生限界と実験結果とは、ほぼ一致していることがわかる。しかし、本報では理論的な取り扱いにおいて、非線形の影響を無視したが、実験結果からは、明らかに非線形振動の特徴的な現象が現れていることがわかる。このことから、1/2次分数調和振動が発生する上限は、振動振幅が増大して非線形の影響が現れる領域では、式(7)を用いて表すことができなくなる。

7 おわりに

歯付きベルトに作用する張力変動によって生じる横振動について、張力変動の大きさが共振発生領域に与える影響を実験的に調べた。また、歯付きベルトを走行していない弦とみなして、その挙動をマシュー方程式で表し、この方程式から求めた振動発生限界図と実験結果とを比較検討した。その結果をまとめると以下ようになる。

(1) 張力変動による歯付きベルトの横振動は強制振動とは異なり、パラメータ励振の形態を示し、とくに激しい横振動が持続する1/2次分数調和振動の場合、その線形領域での発生限界の決定は、 ε がほぼ0.2~0.6の範囲ではマシ

ューの安定限界線図で行えるが、0.11~0.2の範囲についてはさらに検討が必要である。

(2) 張力変動すなわち ε の値が大きくなると、1/2次分数調和振動の振動振幅が大きくなり、非線形振動特有の跳躍や履歴現象が発生するとともにハードスプリングの特性が顕著に現れた。

(3) いったん1/2次分数調波振動が発生すると、非常に激しい横振動が持続し、共振領域が広がるため、この種の共振には十分な注意が必要である。

(4) 本研究では、歯付きベルトの1/2次分数調波振動について、線形特性の範囲内での検討を行ったが、実験結果からは非線形振動の特徴が顕著に現れていることがわかる。このことから理論的な検討において、非線形の影響を考慮することが必要であると考えられる。

参考文献

- 1) J.J.Stoker: Nonlinear Vibrations in Mechanical and Electrical Systems., Interscience Publishers, New York, 1950, pp. 189-219.
- 2) G.F.Carrier: *Quart. Appl. Math.*, 3, 159-165(1945).
- 3) D.W: Oplinger: *J. Acoust. Soc.*, 32-12 1529-1538 (1960).
- 4) 籠谷・ほか4名: 機論, 46-408, C942-952(1980).
- 5) 大崎・古賀: 船機誌49回前刷, 85-88(平成4).
- 6) 安田・鳥居: 機論, 51-463, C506-513(1985).
- 7) 大崎: 船機誌, 28-5, 320-325(平成5).
- 8) 大崎・古賀・三好: 船機誌52回前刷, 169-172(平成5).
- 9) 李・ほか3名: 機論, 59-568, C298-302(1993).
- 10) 李・大滝・綿貫: 機論, 60-575, C211-217(1994).