The Journal of Shimonoseki University of Fisheries 41 (2) 51—55 (1993)

1次ホールドを用いたディジタル制御系のデッドビート制御

瓜 倉 茂*

Deadbeat Control for Digital Control Systems Using the First-Order Hold

Shigeru Urikura*

We describe a method of designing of the deadbeat control for digital control systems using the first-order hold and show its simulation by numerical examples. Using the first-order hold, the rise time of response is greatly improved compared to using the zero-order hold, but the peak time increases as a result. The use of generalized first-order hold is then considered and it shows a better response of deadbeat control with a suitable value of multiplier α. We also show an example of control object in which the zero-order hold indicates the best deadbeat response.

1 まえがき

最近のＩＣ技術の発展により，高性能なマイクロコンピュータが安価で手に入るようになり，広い産業の分野でこのようなコンピュータを使った制御のディジタル化が進んでいる。

ディジタル制御系は，制御ループ内にコンピュータが介在し制御入力を決めている制御系である。このとき，入力を作る最終段階としてディジタル量からアナログ量への変換が行われ，通常，サンプリング区間内で一定値を保つ０次ホールドがよく用いられている。この場合，０次ホールドはＤＡ変換回路がこれに相当し，特別な回路は必要とせず手軽に利用できる利点がある。サンプル値制御系は０次ホールドを用いた制御系であり，多くの理論的考察がなされ,[1)] また実際の制御の現場で使われている。

これに対して，サンプリング区間内で時間とともに一次関数的に変化する信号を出力するような１次ホールドを用いたディジタル制御系がある。１次ホールドは，制御系とＤＡ変換回路との間に一つの電気回路を必要とする。これまで，１次ホールドを用いた制御系の応答はあまり調べられておらず，サーボ系を設計するには１次ホールドを使うことが勧められている[2)]程度である。そこでこの小文では，１次ホールドを用いた制御系に対してデッドビート制御（有限時間整定制御）系を構成する方法を述べ，例題を使って応答を考察する。

2 デッドビート制御系の構成

まず，Fig. 1 に示すような１次ホールドを用いた制御系を考える。制御対象は連続時間系であり，１入力・１出力

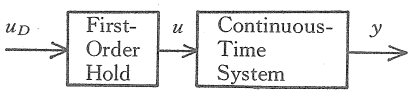

Fig. 1. Control object using the first-order hold.

水産大学校研究業績 第1433号，1992年８月20日受付.
Contribution from Shimonoseki University of Fisheries, No. 1433. Received Aug. 20, 1992.
* 水産大学校教養学科自然科学教室 (Laboratry of Natural Sciences, Division of General Education, Shimonoseki University of Fisheries).

の線形時不変系である。そのシステム方程式は

$$\dot{x}(t)=A_C x(t)+B_C u(t) \quad \text{(1a)}$$
$$y(t)=C_C x(t) \quad \text{(1b)}$$

で表されるものとする。ここで，x は n 次元状態ベクトル，u は入力，y は出力であり，また，A_C, B_C, C_C は適当な次元の定数行列である。

いま，サンプリング周期を T とする。入力は1次ホールドによって作られるものとし，次式

$$u(t)=u_D[k]+\frac{u_D[k]-u_D[k-1]}{T}(t-kT) \quad (2)$$
$$kT \leqq t < (k+1)T, \quad k=0, 1, 2, \cdots$$

で与えられる（入力波形の一例を Fig. 2 に示す）。ここで，$u[k]$ は k サンプル点での信号の大きさで

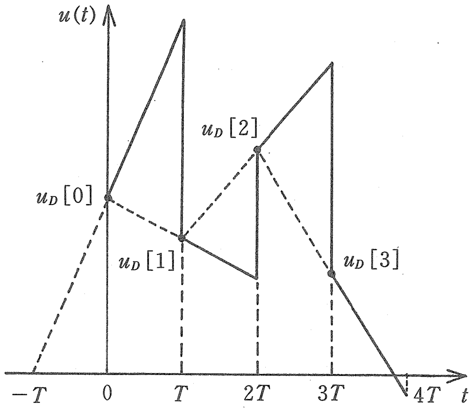

Fig. 2. Wave form of input made by the first-order hold.

$$u_D[k]=u(kT) \quad (3)$$

としている。これは以下に述べる $x_D[k]$ と $y_D[k]$ についても同様である。

(1)，(2)式を使って，各サンプル点 $t=kT$ での $u_D[k]$, $x_D[k]$, $y_D[k]$ の間の関係が導かれる。

$$x_D[k+1]=A_0 x_D[k]+\left(2B_0-\frac{1}{T}B_1\right)u_D[k] + \left(\frac{1}{T}B_1-B_0\right)u_D[k-1] \quad \text{(4a)}$$

$$y_D[k]=C_C x_D[k], \quad k=0, 1, 2, \cdots \quad \text{(4b)}$$

ただし，$u_D[-1]=0$ であり，

$$x_D[k]=x(kT), \; y_D[k]=y(kT) \quad \text{(5a)}$$

$$A_0=e^{A_C T} \quad \text{(5b)}$$

$$B_0=\int_0^T e^{A_C\tau}d\tau B_C \quad \text{(5c)}$$

$$B_1=\int_0^T \tau e^{A_C\tau}d\tau B_C \quad \text{(5d)}$$

としている。

さらに，(4)式は，$v_D[k]=u_D[k-1]$ とおけば，次のような行列形式に書くこともできる。

$$\begin{bmatrix} x_D[k+1] \\ v_D[k+1] \end{bmatrix}=A_D\begin{bmatrix} y_D[k] \\ v_D[k] \end{bmatrix}+B_D u_D[k] \quad \text{(6a)}$$

$$y_D[k]=C_D\begin{bmatrix} x_D[k] \\ v_D[k] \end{bmatrix}, \; k=0, 1, 2, \cdots \quad \text{(6b)}$$

ただし，

$$A_D=\begin{bmatrix} A_0 & -B_0+\frac{1}{T}B_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \; B_D=\begin{bmatrix} 2B_0-\frac{1}{T}B_1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

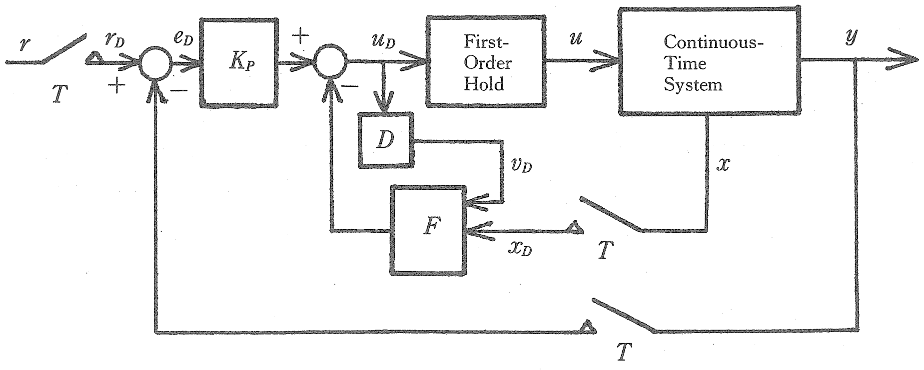

Fig. 3. Construction of deadbeat control system (D: 1 step delayer).

$$C_D=[C_C,\ 0] \tag{6c}$$

と定義されている。この(6)式が，1次ホールドを用いた制御系のシステム方程式である。[3]

次に，デッドビート制御系の構成方法について述べる。デッドビート制御は離散時間系に特有なもので，出力と目標値との偏差を有限時間後に零に整定させるような制御である。いま考えるシステム構成は，Fig. 3 のようなものである。ここで，r は目標値であり，単位ステップ関数を考えている。K_P は定数ゲインであり，定常偏差をなくすように調整される。また，F は(6)式に対する状態フィードバック行列であり，デッドビート特性を得るために決められる。

(6)式で表される制御対象の伝達関数を $G_D(z)$ とする。

$$G_D(z)=\frac{n_D(z)}{d_D(z)}=\frac{b_{n_D}z^{n_D-1}+\cdots\cdots+b_2z+b_1}{z^{n_D}+a_{n_D}z^{n_D-1}+\cdots+a_2z+a_1} \tag{7}$$

ただし，$n_D=n+1$ としている。このとき，デッドビート制御系が構成できるためには，K_P と F は次のように決められなければならない。

$$K_P=\frac{1}{n_D(1)}=\frac{1}{b_1+b_2+\cdots+b_{n_D}} \tag{8}$$

$$F=[f_1^*,\ f_2^*,\ \cdots,\ f_{n_D}^*]Q^{-1} \tag{9}$$

ただし，$f_i^*=-a_i-K_Pb_i,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n_D$ で求められ，

$$Q=[B_D,\ A_DB_D,\ \cdots,\ A_D^{n_D-1}B_D]\begin{bmatrix} a_2 & a_3 & \cdots & a_{n_D} & 1 \\ a_3 & a_4 & & \cdot & \\ \vdots & & \cdot & & \\ a_{n_D} & \cdot & & \mathbf{O} & \\ 1 & & & & \end{bmatrix} \tag{10}$$

で定義される行列である。(なお，(8)，(9)式の導出は付録を参照のこと。)

また，r_D から y_D への関係は次式で与えられる。

$$y_D=\frac{z^{n_D}-d_D(z)-n_{F^*}(z)}{z^{n_D}}r_D \tag{11}$$

ただし，$n_{F^*}(z)=f_1^*+f_2^*z+\cdots+f_{n_D}^*z^{n_D-1}$ としている。

3　一般化1次ホールドを用いたデッドビート制御

1次ホールドの出力式(2)に対して，一般化1次ホールド[4]は傾きが調整でき

$$u(t)=u_D[k]+\frac{\alpha(u_D[k]-u_D[k-1])}{T}(t-kT) \tag{12}$$

の式で出力が与えられる。ここで，α は設計定数の1つであり，$0\leqq\alpha\leqq1$ とする。明らかに，$\alpha=1$ であれば1次ホールドとなり，$\alpha=0$ にすれば0次ホールドとなる。

一般化1次ホールドを用いた場合の制御系のシステム方程式は，次のようになる。

$$\begin{bmatrix} x_D[k+1] \\ v_D[k+1] \end{bmatrix}=A_{D\alpha}\begin{bmatrix} x_D[k] \\ v_D[k] \end{bmatrix}+B_{D\alpha}u_D[k] \tag{13a}$$

$$y_D[k]=C_D\begin{bmatrix} x_D[k] \\ v_D[k] \end{bmatrix},\ k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots \tag{13b}$$

ただし，

$$A_{D\alpha}=\begin{bmatrix} A_0 & -\alpha B_0+\frac{\alpha}{T}B_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{13c}$$

$$B_{D\alpha}=\begin{bmatrix} (1+\alpha)B_0-\frac{\alpha}{T}B_1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{13d}$$

このような制御系に対するデッドビート制御系の設計も，前章と同様の式(7)～(10)を使って出来る。また，α の選び方として次のような方法がある。つまり次式のような偏差の二乗積分値

$$I_e=\int_0^\infty e^2\,dt=\int_0^{n_DT}(r-y)^2\,dt \tag{14}$$

が最小となるように α を選ぶ。

4　例　題

まず，次のような2次元の制御対象を考える。[5]

$$A_C=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},\ B_C=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ C_C=[1\ \ 0] \tag{15}$$

サンプリング時間 $T=0.8$(秒)でサンプリングすれば，1次ホールドを用いた制御系は

$$A_D=\begin{bmatrix} 1 & .55067 & -.08834 \\ 0 & .44939 & -.3166 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_D=\begin{bmatrix} .33767 \\ .86233 \\ 1 \end{bmatrix},\quad C_D=[1\ \ 0\ \ 0] \tag{16}$$

となる。(8)，(9)式より K_P, F を求めれば

$$K_P=2.27 \tag{17a}$$

$$F=[0\ \ .09687\ \ .59930] \tag{17b}$$

を得る。

Fig. 4 は，1次ホールドおよび0次ホールドを用いた制

御系に対してデッドビート制御を行ったときの応答である。1次ホールドを使えば，0次ホールドを使った場合に比べて立上がり時間が改善される反面，行き過ぎ量が大きくなる傾向にある。また，一般化1次ホールドを$\alpha=0.5$とした場合の応答も示されている（このαはI_eを最小にする解析解でなく，いくつかのαに対してI_eを求めたI_e対

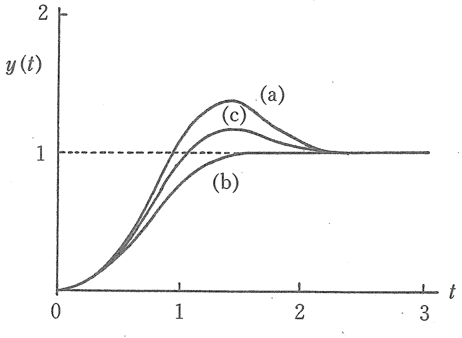

Fig. 4. Responses of deadbeat control systems.
(a) Case of using the first-order hold.
(b) Case of using the zero-order hold.
(c) Case of using the generalized first-order hold.

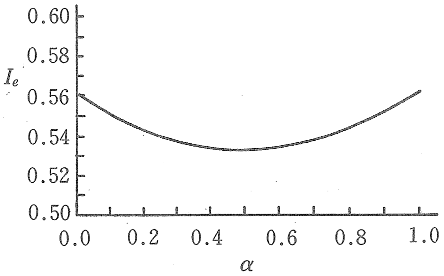

Fig. 5. Graph of I_e vs. α.

αのグラフ（Fig. 5）から選んだものである)。この応答は0次ホールドと1次ホールドとの間にあり，0次ホールドの応答より改善されていることがわかる。

可制御性についての注意点を述べる。連続系の極が特別な位置関係[5]になければ，0次ホールドを用いた制御系は全てのTについて可制御となる。しかし，1次ホールドを用いた制御系についてはこれが成り立たない。たとえば，いま考えている例については，$T=1.0$(秒)で非可制御になる。したがって，サンプリング周期をこの近くで選ぶときには注意が必要となる。

2番目の例題として，次のような制御対象を考える。

$$A_C=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 57.93 & 1.901 & -3.396\end{bmatrix},\quad B_C=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix},\qquad (18)$$

$$C_C=[-80.04\quad .3672\quad 4.593\quad 0]$$

サンプリング周期を$T=0.5$(秒)としてデッドビート制御系を構成し，その応答をFig. 6に示した。またI_e対αのグラフは，Fig. 7のようにαに関して単調増加関数となる。したがって，この制御対象では，1次ホールドや一般化1次ホールドを用いるより，0次ホールドを用いる方が優れた応答が得られることがわかる。

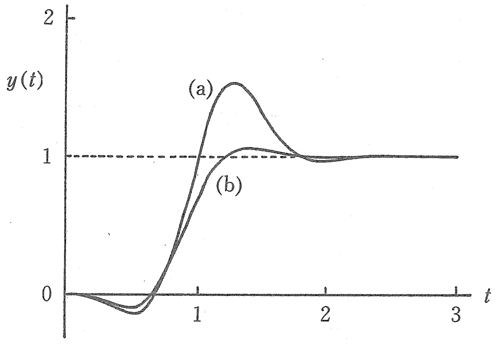

Fig. 6. Responses of deadbeat control systems.
(a) Case of using the first-order hold.
(b) Case of using the zero-order hold.

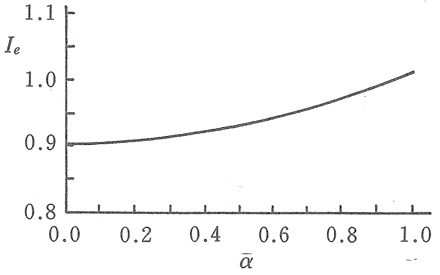

Fig. 7. Graph of I_e vs. α.

5 あとがき

1次ホールドを用いたディジタル制御系に対してデッドビート制御を行う構成法を述べ，数値例でそのシミュレーションを行った。1次ホールドを使えば，0次ホールドを使った場合に比べ立上がり時間は改善されるが，その反面行き過ぎ量が増える。また一般化1次ホールドを用いれば，適当なαの値を選ぶことで，応答波形のよいデッドビート制御が出来ることもわかった。しかし扱う制御対象によっては，0次ホールドを使う方がよい場合もある。これらのことから，1次ホールドを使えば，応答が改善される部分もあるが，簡単な制御装置で済まそうとすれば，0次ホールドを使うだけで十分といえる。

文　献

1）計測自動制御学会：計測と制御（No. 7），22，1983.
2）古田勝久：システムと制御，28，714-712，1984.
3）美多勉：ディジタル制御理論，4，昭晃堂，東京，第1章.
4）E. I. Jury: Sampled-Data Control Systems, 2nd ed., John Wiley & Sons, New York, 1977, Ch. 1.
5）美多，原，近藤：基礎ディジタル制御，2，コロナ社，東京，1989，第2章および第9章.

付録（(8)，(9)式の導出）

1次ホールドを用いた制御系のシステム方程式(6)式を，(10)式の変換行列Qを使って座標変換すると可制御標準形になる。このときA_D, B_D, C_D, Fは次のような行列に変わる。

$$A_D^* = Q^{-1}A_DQ \tag{A1}$$

$$B_D^* = Q^{-1}B_D \tag{A2}$$

$$C_D^* = C_DQ \tag{A3}$$

$$F^* = FQ = [f_1^*, f_2^*, \cdots, f_n^*] \tag{A4}$$

ここで

$$H_{F^*}(z) = F^*(zI - A_D^*)^{-1}B_D^* = \frac{n_{F^*}(z)}{d_D(z)} \tag{A5}$$

とおけば，r_Dからe_Dへの伝達関数$G_{er}(z)$は

$$\begin{aligned} G_{er}(z) &= (1+G_D(z)(1+H_{F^*}(z))^{-1}K_P)^{-1} \\ &= \frac{d_D(z)+n_{F^*}(z)}{d_D(z)+n_{F^*}(z)+K_Pn_D(z)} \end{aligned} \tag{A6}$$

となる。

まず，デッドビート応答が得られるためには，上式の分母の多項式が最高次の係数を除いて全て零になるように決められなければならない。つまり

$$d_D(z)+n_{F^*}(z)+K_Pn_D(z) = z^{n_D} \tag{A7}$$

となることである。そこでF^*として

$$f_i^* = -a_i - K_Pb_i, \quad i=1, 2, \cdots, n_D \tag{A8}$$

とすれば(A7)式が得られる。したがって，(A4)式を使えば(9)式となる。

他方，最終値定理を(11)式に適用してK_Pを求めてみる。(A7)式を(11)式右辺の分子に適用すれば

$$\begin{aligned} y[\infty] &= \lim_{z\to 1}(z-1)y_D \\ &= \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{K_Pn_D(z)}{z^{n_D}}\frac{zr_D}{z-1} \\ &= K_Pn_D(1)r_D \end{aligned} \tag{A9}$$

となり，$y[\infty]=r_D$となるためには

$$K_P = \frac{1}{n_D(1)} \tag{A10}$$

でなければならない。