

ローラチェーンの横振動について— I.*

線密度の小さい場合

大 崎 栄 喜

On the Transversal Vibration of the Roller Chain—I.
In the Case of Low Linear Density

By

Eiki OSAKI

The roller chain is so suitable for power transmission and for timing that it is applied to various purposes. But the vibration phenomena of the roller chain is so complicated that few papers explained theoretically have been published yet. In the present paper, considering the vibration system as indicated in Fig. 1, the author introduced an equation of roller chain vibration, on the basis of the following assumption.

- (1) The roller chain is low linear density and regarded as the multidegrees of freedom system composed of the finite number of links and rollers.
- (2) There is no effect of gravity.
- (3) There is no effect of travelling velocity.
- (4) There is no damping of the vibration.
- (5) Inertia forces in the x -direction are neglected.
- (6) The roller chain vibrates only in one plane.
- (7) The vibration displacements are so small that the chain tension is the same in all points of span.

The equation of chain vibration was expressed by the following difference equation:

$$\frac{m}{2}(1+K^2)\frac{d^2y_k}{dt^2} + \frac{m}{4}(1-K^2)\left(\frac{d^2y_{k-1}}{dt^2} - \frac{d^2y_{k+1}}{dt^2}\right) - \frac{T}{P}(y_{k+1} + y_{k-1} - 2y_k) = 0$$

where K is the parameter related to the moment of inertia of link, m is the mass of chain

* 水産大学校研究業績 第685号, 1972年10月17日 受理.

Contribution from the Shimonoseki University of Fisheries, No. 685.

Received Oct. 17, 1972.

日本機械学会中国・四国支部, 松山地方講演会講演(昭和43年11月30日)

per pitch length ($\text{Kg}\cdot\text{sec}^2/\text{cm}$), P is the pitch length of chain (cm), T is the tension in chain (Kg), y_k is the vertical displacement of the k th chain from the equilibrium position, k is the position number of roller and link and d^2y_k/dt^2 is the acceleration of the k th position.

And the present paper dealt with both the case of the free ends and that of the fixed ones as the boundary value problems, although the boundary condition of the roller chain generally was applied to the fixed ends in free vibration.

Some of the theoretical results were compared with experimental ones, and good agreement was found between them.

1. 緒 言

動力伝達用ローラチェーンは運転条件により、時として、激しい横振動を発生する。

この横振動はローラチェーンの騒音や折損事故等の重大な障害の原因となる。

したがって、この横振動現象を解明することはローラチェーンの横振動による諸々の障害の抜本的な対策を確立することにつながる。しかし、ローラチェーンは不連続な構造で多自由度系である。また、運動学的には多角形運動をするので一般の振動系と同様に取扱うことは困難である。しかし、これを単純な形におきかえることにより捻振動と同様に考えることも可能である。ところが、実際のローラチェーン伝動装置における振動は連成振動となり、きわめて複雑な現象となる。ローラチェーンの材料力学的性質については、多くの研究者によって検討がなされてきた。しかし、機械力学的性質については、満足すべき報告がなされていない。

そこで筆者は研究の基礎的段階として、静止しているローラチェーンを有限個リンクの多自由度系として取扱い、運動方程式を差分方程式で表わした。また、種々の境界条件について振動モードと固有振動数を求め、二、三の結果について実験結果と比較検討を行なった。

2. 記 号

m : リンク, ローラの一つ当りの質量 ($\text{Kg}\cdot\text{sec}^2\cdot\text{cm}^{-1}$)

P : ローラチェーンのピッチ (cm)

T : ローラチェーンの x 方向の張力 (Kg)

$I = m\kappa^2$: リンク (ローラを含む) の重心まわりの慣性モーメント ($\text{Kg}\cdot\text{sec}^2\cdot\text{cm}$)

κ : リンクの回転半径 (cm)

$K = 2\kappa/P$: リンクの形状に関するパラメータ

N : ローラチェーンの個数

y_n : ローラ " k " の運動 (cm)

k : ローラ, リンクの位置番号

ローラ : $k = 0, 1, 2, \dots, N$

リンク : $k = 1, 2, 3, \dots, N$

ω_n : ローラチェーンの固有角振動数 (rad·sec⁻¹)
 $\omega_0 = \sqrt{T/Pm} \cdot \pi/N$: 基準角振動数 (rad·sec⁻¹)
 $\Omega = \omega_n/\omega_0$: 無次元固有振動数
 F_k, F_0^-, F_0^+ : となりあうリンクから作用する横方向の力 (Kg).

3. 基礎運動方程式

基礎運動方程式を誘導するにあたって、次の仮定をおく。

- (a) 重力の影響を考えない (線密度小)
- (b) 各部に作用する摩擦の影響を考えない
- (c) ローラ、リンクの運動はy方向のみとして、変位は微小とする

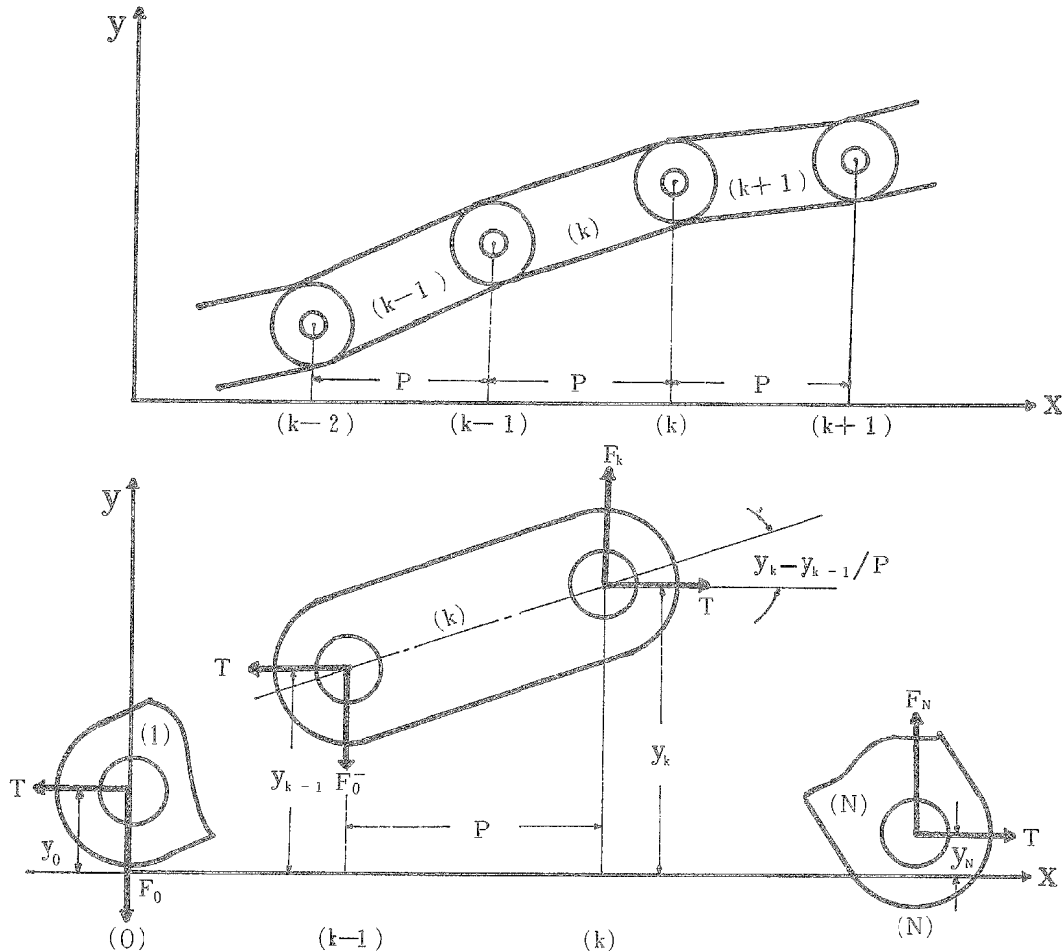


Fig. 1. A system of the chain and forces and their directions acting on links and rollers.

- Notes P : Pitch length of chain
- T : Tension in chain
- y_k : Vertical displacement of the kth particle from the equilibrium position of chain
- k : Position number of roller and link
- N : Total number of links per span length
- x : Longitudinal coordinate of chain
- y : Transversal coordinate of chain (in sprocket plane)
- F_k, F₀⁻, F₀⁺ : Transversal forces from the adjacent links

- (d) x 方向の慣性力を考えない
 (e) リンクを剛体とみなす
 (f) ローラチェーンに加わる張力 T を一定とする。

以上の仮定のもとで第 1 図を参照して、ローラチェーン各部について運動方程式を誘導する。まず、リンク " k " の y 方向の変位に関する運動方程式は

$$\frac{m}{2} \left(\frac{d^2 y_k}{dt^2} + \frac{d^2 y_{k-1}}{dt^2} \right) = F_k - F_0^- \dots \dots \dots (1)$$

で表わせる。また、 $x-y$ 面内の回転に関する運動方程式は

$$\frac{I}{2} \left(\frac{d^2 y_k}{dt^2} - \frac{d^2 y_{k-1}}{dt^2} \right) - T(y_k - y_{k-1}) = \frac{P}{2} (F_k + F_0^-) \dots \dots \dots (2)$$

で表わせる。

$$\text{ここで } \frac{I}{P} = \frac{m}{P} \kappa^2 = \frac{mP}{4} K^2$$

なる関係を(2)式に代入し、(1)、(2)式より解析に不必要な F_0^- を消去すると

$$\frac{m}{2} (1+K^2) \frac{d^2 y_k}{dt^2} + \frac{m}{2} (1-K^2) \frac{d^2 y_{k-1}}{dt^2} + \frac{T}{P} (y_k - y_{k-1}) = 2F_k \dots \dots \dots (3)$$

が成立する。また、リンク " $k+1$ " についてもリンク " k " と同様に考えると、 y 方向の変位に関する運動方程式は

$$\frac{m}{2} \left(\frac{d^2 y_{k+1}}{dt^2} + \frac{d^2 y_k}{dt^2} \right) = F_0^+ - F_k \dots \dots \dots (4)$$

で表わせる。また、 $x-y$ 面内の回転に関する運動方程式は

$$\frac{I}{2} \left(\frac{d^2 y_{k+1}}{dt^2} - \frac{d^2 y_k}{dt^2} \right) + T(y_{k+1} - y_k) = \frac{P}{2} (F_0^+ + F_k) \dots \dots \dots (5)$$

で表わせる。

$$\text{ここで(5)式に } \frac{I}{P} = \frac{mP}{4} K^2$$

なる関係を代入し、(4)、(5)式より F_0^+ を消去すると

$$\frac{m}{2} (1+K^2) \frac{d^2 y_{k+1}}{dt^2} + \frac{m}{2} (1-K^2) \frac{d^2 y_k}{dt^2} - \frac{T}{P} (y_{k+1} - y_k) = -2F_k \dots \dots \dots (6)$$

が成立する。また、(3)、(6)式より F_k を消去すると

$$\frac{m}{2} (1+K^2) \frac{d^2 y_k}{dt^2} + \frac{m}{4} (1-K^2) \left(\frac{d^2 y_{k-1}}{dt^2} - \frac{d^2 y_{k+1}}{dt^2} \right) - \frac{T}{P} (y_{k+1} + y_{k-1} - 2y_k) = 0 \dots \dots \dots (7)$$

が成立する。これが求める基礎運動方程式である。ここでローラ両端に作用する横方向の力を求めると(3)、(6)式より

左端 ($k=0$) では

$$F_0 = -\frac{1}{2} \left[\frac{m}{2} (1+K^2) \frac{d^2 y_0}{dt^2} + \frac{m}{2} (1-K^2) \frac{d^2 y_1}{dt^2} - \frac{T}{P} (y_1 - y_0) \right] \dots \dots \dots (8)$$

となり

右端 ($k=N$) では

$$F_N = \frac{1}{2} \left[\frac{m}{2} (1+K^2) \frac{d^2 y_N}{dt^2} + \frac{m}{2} (1-K^2) \frac{d^2 y_{N-1}}{dt^2} + \frac{T}{P} (y_N - y_{N-1}) \right] \dots \dots \dots (9)$$

となる。ただし、リンク " 1 " と " N " を支えるローラ " 0 " と " N " の支持点では y 方向の運動は必要に応じて仮定されるが、回転は起らない。

4. 自由振動解

3. で求めた基礎運動方程式により次のようにして固有振動数および振動モードを求めることが出来る。

$$\text{まず, } y_k = \eta_k e^{i\omega t}, \quad \eta_k = \text{fun. } \{k\} \dots\dots\dots (10)$$

とおき, (7)式に代入して変数分離すると, (7)式は

$$\left. \begin{aligned} -\Omega^2 \left(\frac{1+K^2}{2} \eta_k + \frac{1-K^2}{2} \frac{\eta_{k-1} - \eta_{k+1}}{2} \right) + \left(\frac{N}{\pi} \right)^2 (2\eta_k - \eta_{k-1} - \eta_{k+1}) &= 0 \\ \text{ただし, } \Omega^2 = \frac{\omega_n^2}{\frac{T}{Pm} \left(\frac{\pi}{N} \right)^2} = \left(\frac{\omega_n}{\omega_0} \right)^2 & \end{aligned} \right\} \dots\dots (11)$$

となる。

ここで,

$$\frac{1-K^2}{4} \Omega^2 + \left(\frac{N}{\pi} \right)^2 = A, \quad \frac{\Omega^2}{2A} = B \dots\dots\dots (12)$$

とおくと, (11)式は

$$\eta_{k+1} - 2(1-B)\eta_{k+1} + \eta_{k-1} = 0 \dots\dots\dots (13)$$

となる。

ここで, 特性根を λ とすると, (13)式の特性方程式は,

$$\lambda^2 - 2(1-B)\lambda + 1 = 0 \dots\dots\dots (14)$$

ゆえに特性根は

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= (1-B) \pm \sqrt{B^2 - 2B} = (1-B) \pm \sqrt{2B - B^2} j \\ \text{ただし } 0 &< B < 2 \\ j &= \sqrt{-1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

となる。

ここで, 極形式で表わすと,

$$1-B = \cos \theta, \quad \sqrt{2B - B^2} = \sin \theta \dots\dots\dots (16)$$

の関係より, (15)式は

$$\lambda = \cos \theta \pm j \sin \theta \dots\dots\dots (17)$$

となる。

よって, (13)式の一般解は

$$\eta_k = C_1 e^{j\theta k} + C_2 e^{-j\theta k} = C_1 \cos k\theta + C_2 \sin k\theta \dots\dots\dots (18)$$

となる。ただし, $C_1, C_2, C_1,$ および C_2 は境界条件によって決定される定数である。

また固有値を ν とすると,

$$\nu = \frac{N}{\pi} \cos^{-1}(1-B) \dots\dots\dots (19)$$

とおくことにより

$$B = 2 \sin^2 \left(\frac{\nu \pi}{2N} \right) \dots\dots\dots (20)$$

となり, (18)式は

$$\eta_k = C_1 \cos \nu \pi \frac{k}{N} + C_2 \sin \nu \pi \frac{k}{N} \dots\dots\dots (21)$$

となる。これは求める一般解である。

(21)式を見ると、各境界条件に合わせて ω の値を与えると C_1, C_2 は決定される。

また自由振動の場合は ν の値が求められると、 ω が決定される。

ここで、一般的な例として、 ν の値が求められている場合、(11)式の Ω (無次元振動数) は、(12), (20)式の関係より

$$\Omega = \frac{\sin\left(\frac{\nu\pi}{2N}\right) / \left(\frac{\pi}{2N}\right)}{\sqrt{1 + (K^2 - 1)\sin^2\left(\frac{\nu\pi}{2N}\right)}} \dots\dots\dots (22)$$

となる。以上の結果より、(21), (22)式は(11)式の振動モードおよび固有振動数を表わす。

5. 境界値問題としての解

4. において、一般的な振動モードおよび固有振動数は求められた。ここでは各境界条件を考慮した場合の振動モードおよび固有振動数を求める。各境界条件の表現は次のようになる。

$k=0, k=N$ において

(i) 固定端: $\eta_k=0$

(ii) 自由端: $F_k=0$

(iii) 強制力端: $F_0 = -F_0^0 e^{j\omega t}, F_N = F_0^N e^{j\omega t}$ (ただし、強制力 $-F_0^0 e^{j\omega t}, F_0^N e^{j\omega t}$ は仮定する)

(iv) 強制変位端: $\eta_k = y_0$ (ただし、 y_0 は仮定する)

となる。ここで (ii), (iii) の条件は(8), (9)式より

$$\left. \begin{aligned} \eta_0 \left(\cos \nu \frac{\pi}{N} \right) - \eta_1 = \frac{PF_0^0}{T} \left(\frac{N}{\pi} \right)^2 / A, \quad k=0 \\ \eta_N \left(\cos \nu \frac{\pi}{N} \right) - \eta_{N-1} = \frac{PF_0^N}{T} \left(\frac{N}{\pi} \right)^2 / A, \quad k=N \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (23)$$

となる。境界条件の一例として、自由端-強制力端の場合を考えると、境界条件は、 $F_0=0, F_N=F_0^N e^{j\omega t}$ となる。ただし、 F_0^N は任意強制力である。

まず、 $F_0=0$ のとき(21)式は

$$\begin{aligned} k=0: \eta_0 &= C_1 \\ k=1: \eta_1 &= C_1 \cos \nu \frac{\pi}{N} + C_2 \sin \nu \frac{\pi}{N} \end{aligned}$$

となる。上式を(23)式に代入すると、

$$C_1 \cos \nu \frac{\pi}{N} - \left(C_1 \cos \nu \frac{\pi}{N} + C_2 \sin \nu \frac{\pi}{N} \right) = 0$$

の関係より

$$C_2 \sin \nu \frac{\pi}{N} = 0 \dots\dots\dots (24)$$

となる。

また、 $F_N=F_0^N e^{j\omega t}$ のとき(21)式は

$$\begin{aligned} k=N: \eta_N &= C_1 \cos \nu \pi + C_2 \sin \nu \pi \\ k=N-1: \eta_{N-1} &= C_1 \cos \nu \pi \frac{N-1}{N} + C_2 \sin \nu \pi \frac{N-1}{N} \end{aligned}$$

となる。上式を(23式)に代入すると、

$$(C_1 \cos \nu \pi + C_2 \sin \nu \pi) \cos \nu \frac{\pi}{N} - \left(C_1 \cos \nu \pi \frac{N-1}{N} + C_2 \sin \nu \pi \frac{N-1}{N} \right) = \frac{PF_0^N}{T} \left(\frac{N}{\pi} \right)^2 / A$$

となる。上式を変形すると

$$-C_1 \sin \nu \pi \cdot \sin \nu \frac{\pi}{N} + C_2 \cos \nu \pi \cdot \sin \frac{\pi}{N} = \frac{PF_0^N}{T} \left(\frac{N}{\pi} \right)^2 / A \dots \dots \dots (25)$$

となる。また、(25式)に(24式)を代入すると

$$C_1 = \frac{PF_0^N}{T} \left(\frac{N}{\pi} \right)^2 \frac{-1}{A \sin \nu \pi \cdot \sin \nu \frac{\pi}{N}} \dots \dots \dots (26)$$

となる。ここで共振条件を考えると、共振は、 $|C_1| \rightarrow \infty$ のときに発生する。よって、固有振動数は、(24式)を考慮に入れると

$$C_2 = 0 ; \sin \nu \pi = 0$$

$$\text{また, } C_2 \neq 0 : \sin \nu \frac{\pi}{N} = 0$$

である。ゆえに固有値 ν は

$$\nu = 1, 2, 3, \dots, N \text{ で与えられる。}$$

また自由振動モードは

Table 1. Solutions for the multidegrees of freedom without consideration of gravity.

No.	Boundary condition	Mode		Resonance condition of eigenvalue ν
		$\eta_{(k)}$	n	
1	Fix-Fix	$\sin n\pi \frac{k}{N}$	1, 2, ..., N-1	1, 2, ..., N-1
2	Free-Free	$\cos n\pi \frac{k}{N}$	1, 2, ..., N	1, 2, ..., N
3	Fix-Free	$\sin \left(n - \frac{1}{2} \right) \pi \frac{k}{N}$	1, 2, ..., N	1/2, 3/2, ..., N-1/2
4	Fix-Displacement	$y_0 \frac{\sin \nu \pi k / N}{\sin \nu \pi}$		1, 2, ..., N-1 (Fix-Fix)
5	Free-Force	$-\bar{y}_0 \frac{\cos \nu \pi k / N}{\sin \nu \pi \left(\sin \frac{\nu \pi}{N} / \frac{\nu}{N} \right)}$		1, 2, ..., N (Free-Free)
6	Fix-Force	$\bar{y}_0 \frac{\sin \nu \pi k / N}{\cos \nu \pi \left(\sin \frac{\pi \nu}{N} / \frac{\nu}{N} \right)}$		1/2, 3/2, ..., N-1/2 (Fix-Free)
7	Force-Displacement	$y_0 \frac{\cos \nu \pi k / N}{\cos \nu \pi}$		1/2, 3/2, ..., N-1/2 (Free-Fix)

Notes

$$\text{Equivalent displacement: } \bar{y}_0 = NP \frac{F_0}{T \nu} / \left\{ 1 + \frac{1-K^2}{4} \left(\frac{\pi \Omega}{N} \right)^2 \right\}$$

$$\nu = \frac{N}{\pi} \cos^{-1} \left[\left\{ 1 - \frac{1+K^2}{4} \Omega^2 / \left(\frac{N}{\pi} \right)^2 \right\} / \left\{ 1 - \frac{K^2-1}{4} \Omega^2 / \left(\frac{N}{\pi} \right)^2 \right\} \right]$$

$$\eta_k = C_1 \cos n\pi \frac{k}{N} \quad (\text{ただし, } n=1, 2, 3, \dots, N)$$

となる。ここで n は振動の次数である。

他の境界条件の場合も同様に解くことが出来る。各境界条件での計算結果は第1表に示すとおりである。

静止時のローラチェーンの振動は、一般に境界条件として、固定端—固定端の場合を考えればよい。ここで、代表的なローラチェーンについて、両端固定の場合のローラチェーン設定張力 T と固有振動数 ω との関係の計算結果を第2図～第5図に両対数グラフで示した。

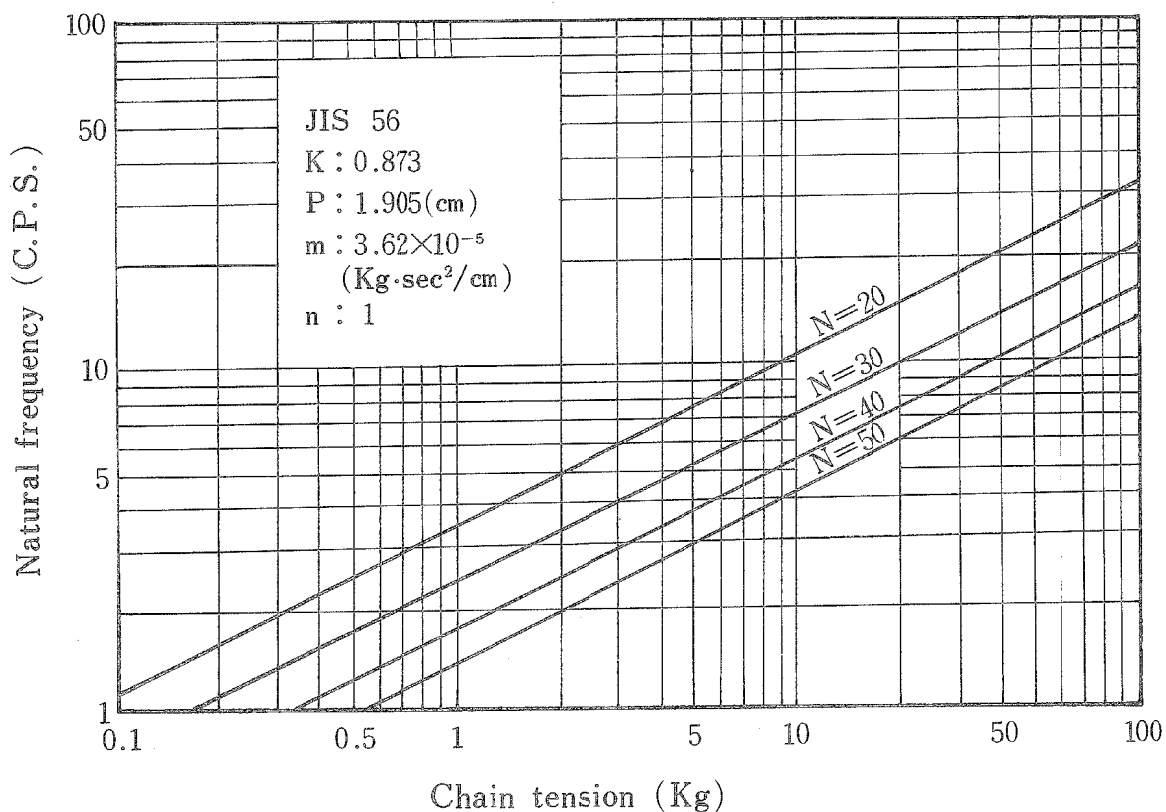


Fig. 2. Natural frequency characteristics for multidegrees of freedom system.
(Boundary condition "fix - fix")

6. 実験装置および実験方法

実験は次のような条件を満足する必要がある。

- (i) 初期設定張力 T の検出が容易である。
- (ii) 初期設定張力 T は、連続的に変化させることが可能で、しかも実験中変動しない。
- (iii) 張力の設定および検出のために、ローラチェーンの長手方法の移動が容易である。
- (iv) 上下両端でローラチェーンは固定端の境界条件である。

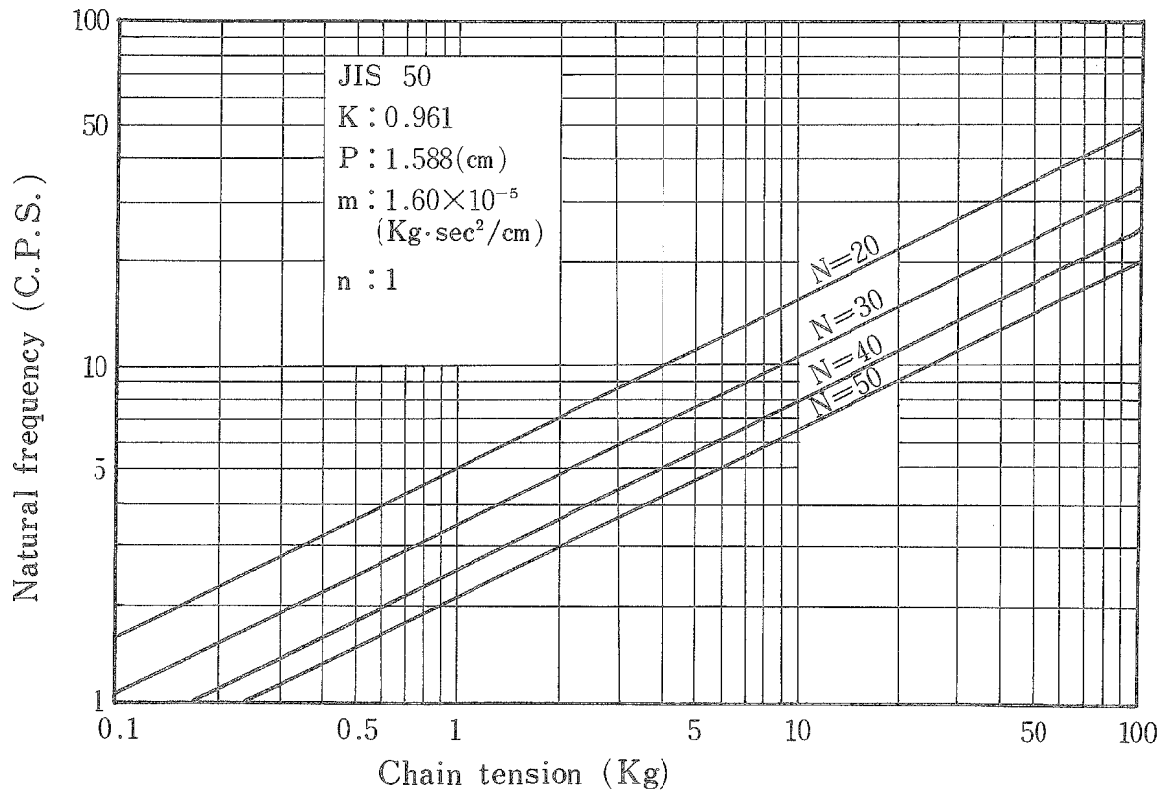


Fig. 3. Natural frequency characteristics for multidegrees of freedom system. (Boundary condition "fix - fix")

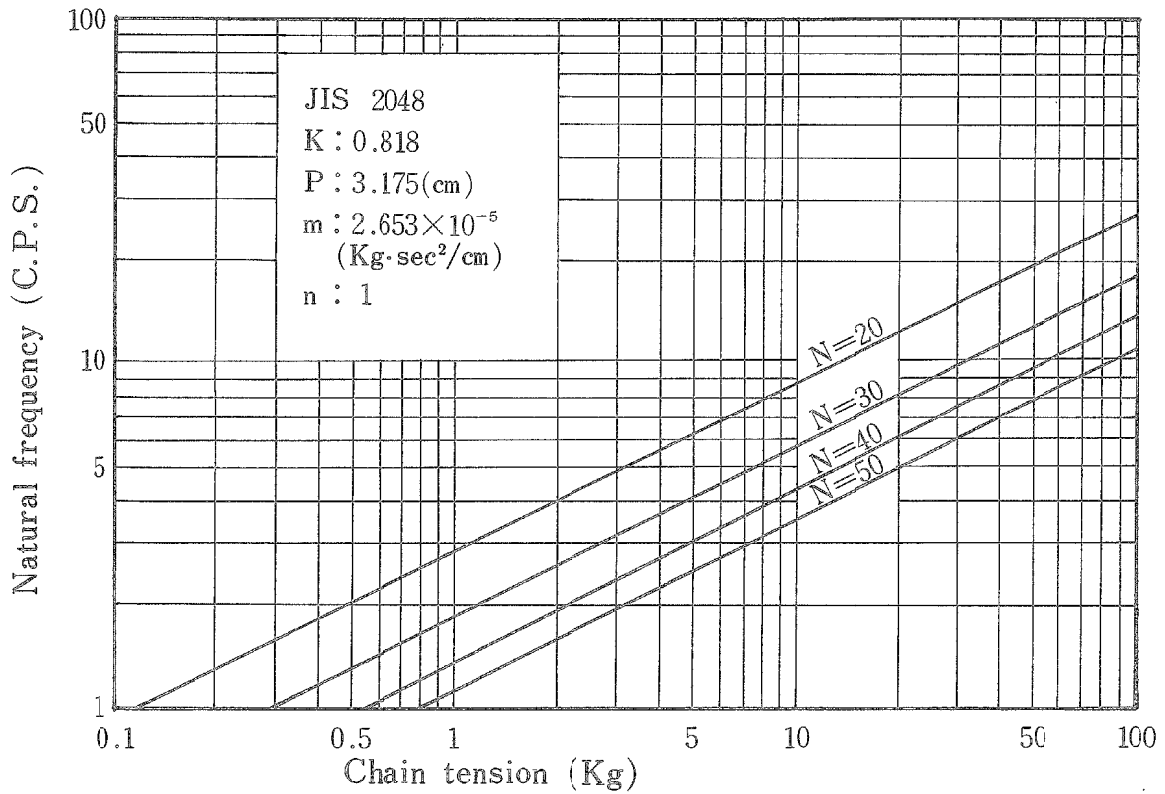


Fig. 4. Natural frequency characteristics for multidegrees of freedom system. (Boundary condition "fix - fix")

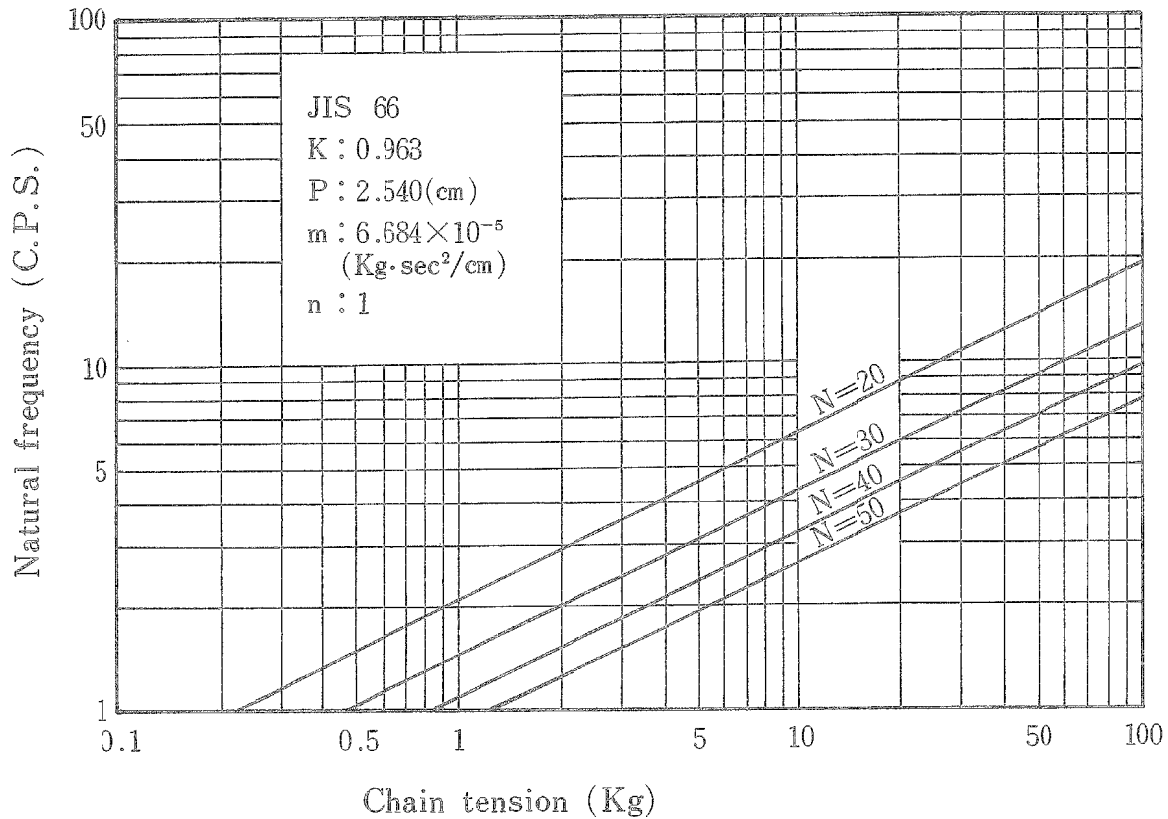


Fig. 5. Natural frequency characteristics for multidegrees of freedom system.
(Boundary condition "fix-fix")

(v) ローラチェーンの振動振巾は微小である。

以上の条件のもとで実験装置を作製した。

また、実験にもちいたローラチェーンの種類は次のとおりである。

形式：JIS 50

ピッチ：1.588 cm

ピッチ当り重量：0.0166 Kg

形状に関する無次数 K ：0.96

チェーン個数：50個。

第6図に実験装置の略図を示す。実験では、まず、ローラチェーンを固定端⑭、⑮にピンで固定する。ターンバックル①を回転し、ストレンメータ③を観測しながら初期設定張力をローラチェーンに加える。発信器⑤の周波数は増巾器⑥を通り、電磁石⑦でローラチェーンを加振する。この時、ローラチェーンの固有振動数と加振周波数が一致すると、ローラチェーンは共振を起す。この共振の振動数と振巾は、静電容量ピックアップ⑧を通り、微小変位測定器⑨で電流に変換され、電磁オシログラフ⑩で記録される。また、電磁オシログラフには、振動数を正確に読み取るために基準信号器⑪で基準信号を同時に記録する。

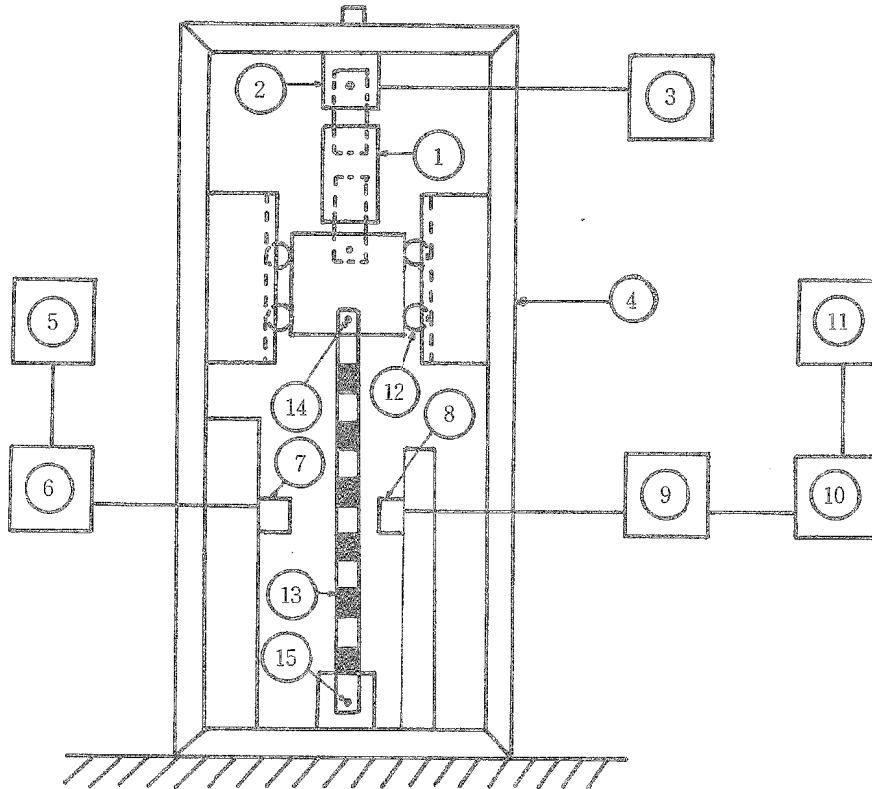


Fig. 6. Schematic diagram of the experimental apparatus.

- Notes
- | | |
|------------------------|------------------------------|
| ①: Turnbuckle | ⑧: Capacitive pick-up |
| ②: Tension gauge | ⑨: Capacitive micrometer |
| ③: Strain meter | ⑩: Electric oscillograph |
| ④: Frame | ⑪: Standard signal generator |
| ⑤: Frequency generator | ⑫: Bearing |
| ⑥: DC-Amplifier | ⑬: Roller chain |
| ⑦: Electric magnet | ⑭, ⑮: Pin |

7. 実験結果および理論値との比較

実験結果を整理し、理論値と比較すると第7図に示すようになる。横軸は設定張力 T であり、縦軸は固有振動数 ω_n である。 $n=1$ および $n=2$ はローラチェーンの1次、2次の固有振動数を示す。実線は理論値、 \circ 印は測定結果である。

8. 結 言

理論値と実験結果の比較より、(7)式の運動方程式は、ローラチェーンの振動現象を表わしていることが証明された。また、3. で述べた (a), (b) および (f) の仮定は、運動方程式の誘導を簡単にするためである。しかし、この仮定は現実の物理現象と矛盾する。よって、今後の研究課題は、重力の影響を考慮に入れること、振動振幅が大きくなると振動によって張力変動が固有振動数に与える影響を考慮することである。

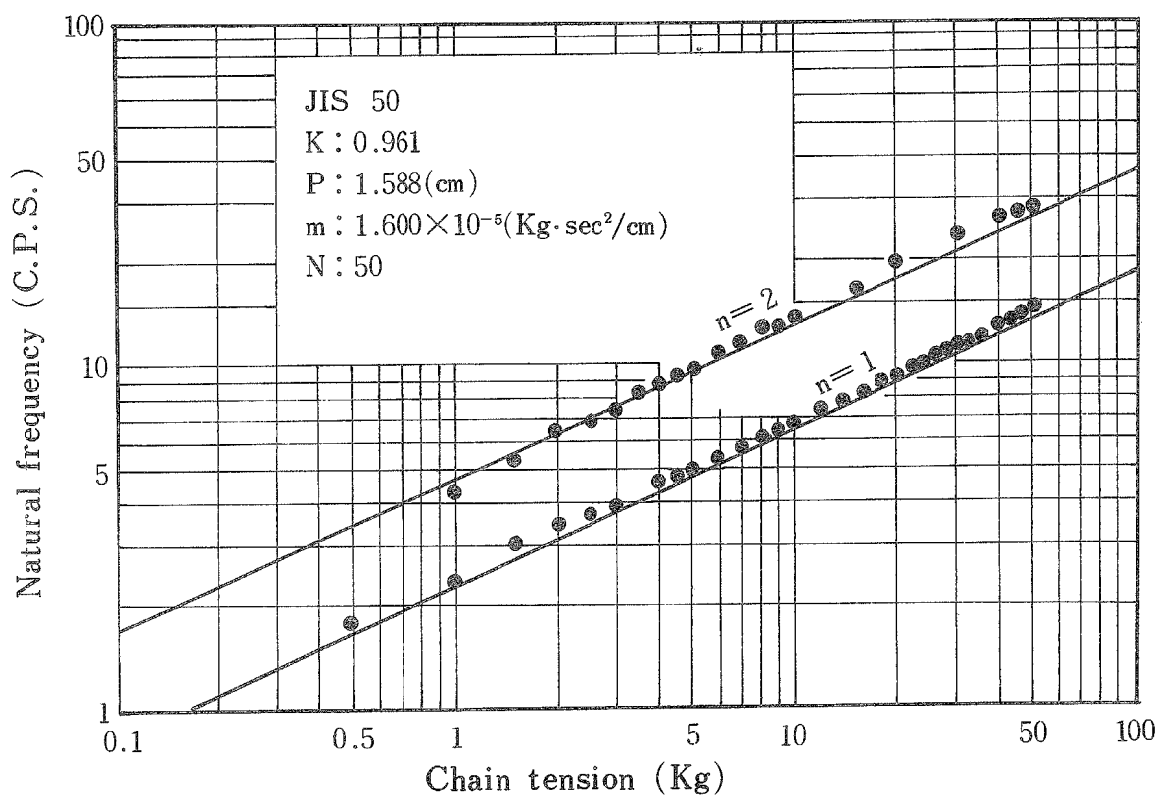


Fig. 7. The comparison between the theoretical values and experimental ones.
 (Boundary condition "fix-fix")

Notes

- : Theoretical values
- : Experimental values

また、この研究の最終目標は、走行中のローラチェーンの強制振動を解析することである。しかし、この振動現象の理論式を誘導することは非常に困難である。最後に、この研究は、筆者が九州大学工学部在籍中に行なったものであり、研究にあたって助言を賜った九州大学工学部清水教授および田村助教授に謝意を表わす次第である。

文 献

- 1) 高橋健人, 1961: 差分方程式, pp. 159, 培風館 (東京).
- 2) BINDER, R. C., 1956: Mechanics of the Roller Chain Drive, p. 154~166, Prentice-Hall, Inc.